Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Ph. Nägele
Dipl.-Math. J. Daube

20.01.2016

Übung zur Vorlesung

Bochner-Räume

Wintersemester 2015/16 – Blatt 11

Aufgabe 1 (Partielle Integration für stetige Bilinearformen) (8 Punkte)
Seien X, Y, Z Banachräume und $1 \le p, q < \infty$ und $1 \le r \le \infty$ so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Beweisen Sie für eine stetige Bilinearform $B : X \times Y \to Z$ die folgenden Aussagen.

- B induziert durch

$$(u, v) \mapsto B(u, v) \text{ mit } B(u, v)(t) := B(u(t), v(t))$$

  eine stetige Bilinearform $B : W^{1,p}(I, X) \times W^{1,q}(I, Y) \to W^{1,r}(I, Z)$. Dabei gilt für die distributionelle Zeitableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B(u, v) = B(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u, v) + B(u, \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v).$$

- Für alle $s, s' \in I$ und alle $(u, v) \in W^{1,p}(I, X) \times W^{1,q}(I, Y)$ gilt die partielle Integrationsformel

$$\int_s^{s'} B(u(t), \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t))\,\mathrm{d}t = B(u(s), v(s)) - B(u(s'), v(s')) - \int_s^{s'} B(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t), v(t))\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 2 (Verallgemeinerter Satz von Picard–Lindelöf) (8 Punkte)
Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(t, u(t)),\ t \in [0, T], \quad u(t_0) = u_0 \tag{1}$$

mit vorgegebenen Anfangswert $u_0 \in X$ und vorgegebener rechter Seite $f : [0, T] \times X \to X$. Es bezeichne

$$\overline{B_r(u_0)} = \{u \in X \ : \ \|u - u_0\|_X\}$$

die abgeschlossene Kugel in X mit Radius $r > 0$. Weiter sei f beschränkt und lokal Lipschitz-stetig im zweiten Argument, d.h. es existieren $M, r_0, L > 0$, so dass

$$\|f(t, u_1)\|_X \le M \quad \text{und} \quad \|f(t, u_1) - f(t, u_2)\|_X \le L\|u_1 - u_2\|_X$$

für alle $t \in [0, T]$ und alle $u_1, u_2 \in \overline{B_r(u_0)}$ gilt.
Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem (1) auf dem Intervall

$$I = [0, T] \cap [t_0 - a, t_0 + a] \text{ mit } a = \min\{\tfrac{r}{M}, \tfrac{1}{2L}\}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^1(I, X)$ mit $u(I) \subset \overline{B_r(u_0)}$ besitzt.

Abgabe: Mittwoch, den 27.01.2016 in der Vorlesung