Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Ph. Nägele
Dipl.-Math. J. Daube

27.01.2016

Übung zur Vorlesung

Bochner-Räume

Wintersemester 2015/16 – Blatt 12

Es seien $I = (0, T)$ ein Zeitintervall und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Ziel dieses Blattes ist der Beweis der Existenz und der Eindeutigkeit von schwachen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \quad \text{in } I \times \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{in } I \times \partial\Omega, \\ u(0) &= u_0 \text{ in } \Omega \end{aligned} \tag{1}$$

zu gegebenen Daten $f \in L^2(I, L^2(\Omega))$ und $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Aufgabe 1 (Abzählbare, dichte Teilmenge von $W_0^{1,2}(\Omega)$) (2 Punkte)
Konstruieren Sie eine Folge $(w_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Elemente $(w_i)_{i=1,\dots,n}$ linear unabhängig sind und, dass für $V_n = \operatorname{span}\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ die Menge $\bigcup_{n=1}^\infty V_n$ dicht in $W_0^{1,2}(\Omega)$ liegt.

Aufgabe 2 (Approximation der Daten) (2 Punkte)
Begründen Sie, dass Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(\overline{I}, L^2(\Omega))$, so dass $f_n \to f$ in $L^2(I, L^2(\Omega))$ für $n \to \infty$ und $(u_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_0^n \in V_n$ und $u_0^n \to u_0$ in $L^2(\Omega)$ für $n \to \infty$ existieren.

Aufgabe 3 (Galerkin-Approximation) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ approximative Lösungen $u_n(t)$ der Form

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i^n(t) w_i \in V_n$$

existieren, die für alle $t \in I$ und alle $k = 1, 2, \dots, n$ das Galerkin-System

$$\left\langle \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_n(t), w_k \right\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \langle A u_n(t), w_k \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \langle f_n(t), w_k \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

mit der Anfangsbedingung $u_n(0) = u_0^n$ lösen. Dabei ist der Operator $A : W_0^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$ durch

$$\varphi \mapsto \langle Au, \varphi \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x$$

für $u, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gegeben.

Aufgabe 4 (Konvergenz der Galerkin-Lösungen) (2 Punkte)
Benutzen Sie die A-priori-Abschätzungen um eine Teilfolge $(u_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_{n_m} \rightharpoonup u$ schwach in $L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega))$ zu finden.

Aufgabe 5 (Existenz einer schwachen Lösung) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass u eine schwache Lösung von (1) ist, d.h. für alle $\varphi \in C_0^\infty(I)$ und alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt

$$-\int_I \int_\Omega u(t) \partial_t \varphi(t) v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_I \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \varphi(t) \nabla v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_I \int_\Omega f(t) \varphi(t) v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.$$

Aufgabe 6 (Eindeutigkeit der schwachen Lösung) (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass (1) genau eine schwache Lösung besitzt.

Abgabe: Mittwoch, den 03.02.2016 in der Vorlesung