Bochner-Räume

Felicitas Schmitz, Philipp Nägele, Johannes Daube

18. März 2016

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung und Motivation

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet. Zum Ausgangszeitpunkt $t = 0$ werde die Temperaturverteilung in Ω durch die Funktion $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ beschrieben. Es gebe in Ω keine Wärmequelle und der Rand $\partial\Omega$ werde konstant auf eine Temperatur von 0 Grad gehalten. Dann gehorcht die Temperaturverteilung $u : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, die sich während dem Zeitraum $I = (0, T)$ in Ω durch Diffusion einstellt, der sogenannten Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \quad \text{in } I \times \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{in } I \times \partial\Omega, \\ u(0) &= u_0 \ \text{ in } \Omega. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Hierbei bezeichnet ∂_t die partielle Ableitung nach der Zeitvariable t und $\Delta := \sum_{i=1}^{3} \partial_i^2$ ist der üblichen Laplace-Operator. Die Wärmeleitungsgleichung ist eine Evolutionsgleichung, das heißt eine partielle Differentialgleichung, deren Lösung explizit auch von der Zeit t abhängt.
Partielle Differentialgleichungen lassen sich nur in speziellen Fällen „direkt“, das heißt durch Angabe einer Funktionsvorschrift, lösen. Daher beschäftigt sich die moderne Theorie partieller Differentialgleichungen vorrangig mit der Existenz sowie den qualitativen und quantitativen Eigenschaften sogenannter „schwacher Lösungen“. Die Existenztheorie liefert oft auch Hinweise auf die Konstruktion möglicher numerischer Verfahren zur computerbasierten Behandlung.
Die Existenztheorie selbst nutzt meist abstrakte Hilfsmittel, die wiederum auf speziellen funktionalanalytischen Eigenschaften der zugrunde liegenden Funktionenräume aufbauen. Um die kanonischen Funktionenräume in unserem Beispiel genauer auszuarbeiten und zu motivieren, stellen wir zunächst eine Vorüberlegung an.
Wir sehen der Gleichung (0.1) direkt an, dass eine potentielle Lösung u unterschiedliche Differenzierbarkeitseigenschaften bezüglich der Zeit- und Ortsvariablen erfüllen muss: Eine klassische Lösung müsste einmal stetig differenzierbar in der Zeit und zweimal stetig differenzierbar im Ort sein. Wir könnten also zunächst nach Lösungen in dem kanonisch normierten Funktionenraum

$$X = \left\{ u : I \times \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \partial_t u \in C^0(I \times \Omega),\ \partial_i^2 u \in C^0(I \times \Omega) \text{ für } i = 1, 2, 3 \right\}$$

suchen. Andererseits können wir einer Funktion $u : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$[\tilde{u}(t)](x) := u(t, x)$$

eine Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{u} : I &\to Y(\Omega), \\ t &\mapsto \tilde{u}(t), \end{aligned}$$

mit Werten in einem Funktionenraum $Y(\Omega)$, dessen Elemente auf Ω definierte Funktionen sind, zuordnen. Wir könnten also auch nach einer Lösung $\tilde{u} \in C^1(I, Y(\Omega))$ suchen, wobei eine sinnvolle Wahl von $Y(\Omega)$ noch zu klären ist. Für klassische Lösungen $\tilde{u}$ erwarten wir mit Blick auf Gleichung (0.1) $\tilde{u} \in C^1(\bar{I}, C^2(\overline{\Omega}))$, also $Y(\Omega) = C^2(\overline{\Omega})$.
Diese zweite Sichtweise wird sich im Folgenden als nützlich erweisen, denn sie erlaubt uns gewissermaßen, Zeit- und Ortsvariablen zu entkoppeln, was im Hinblick auf die Struktur der Gleichung (0.1) durchaus sinnvoll erscheint.
Um uns weiter an die „richtige“ Wahl der Funktionenräume heranzutasten, nehmen wir nun an, wir hätten bereits eine hinreichend glatte Lösung u von (0.1) gefunden. Multiplizieren wir Gleichung $(0.1)_1$ mit u und integrieren über Ω zu einem festen, aber beliebigen Zeitpunkt $t \in I$, so erhalten wir

$$\int_\Omega \partial_t u(t,x) u(t,x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \Delta u(t,x) u(t,x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Der Satz von Gauß angewandt auf das Vektorfeld $u(t,x)\nabla u(t,x)$ liefert dann zusammen mit der Randbedingung $(0.1)_2$

$$\int_\Omega \partial_t u(t,x) u(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(t,x) \nabla u(t,x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Mit der Kettenregel ist

$$\partial_t u(t,x) u(t,x) = \frac{1}{2} \partial_t \left(u(t,x)^2 \right)$$

und somit

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \partial_t \left(u(t,x)^2 \right)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Nach formaler Vertauschung von Integration und Ableitung erhalten wir schließlich

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega u(t,x)^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2\,\mathrm{d}x = 0. \tag{0.2}$$

Um von u zu $\tilde{u}$ zu wechseln, müssen wir eine sinnvolle Wahl von $Y(\Omega)$ treffen. Im Hinblick auf die Größe

$$\int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2\,\mathrm{d}x$$

und die Randbedingung $(0.1)_2$ ist der Sobolevraum

$$W_0^{1,2}(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \;\middle|\; \nabla v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3), v_{|\partial\Omega} = 0 \right\}$$

ausgestattet mit[1]

$$\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} := \|\nabla v\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)}$$

eine naheliegende Wahl für $Y(\Omega)$. Damit ist nun (0.2) äquivalent zu

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{u}(t)\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} = 0.$$

Integration dieser Identität bezüglich t über $(0, s) \subset I$ liefert zusammen mit der Anfangsbedingung $(0.1)_3$ für eine Anfangstemperaturverteilung $u_0 \in L^2(\Omega)$ dann

$$\frac{1}{2}\|\tilde{u}(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^s \|\tilde{u}(t)\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\|\tilde{u}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Da die rechte Seite unabhängig von s ist, erhalten wir schließlich die sogenannte Energieungleichung

$$\frac{1}{2}\sup_{s\in I}\|\tilde{u}(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \|\tilde{u}(t)\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \,\mathrm{d}t \le \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{0.3}$$

für die zugeordnete Funktion $\tilde{u}$. Aus dieser Energiegleichung können wir nun eine Reihe von Schlüssen ziehen. Zunächst zeigt sie, dass die Gesamtenergie

$$\frac{1}{2}\|\tilde{u}(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^s \|\tilde{u}(t)\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \,\mathrm{d}t$$

des Systems zum Zeitpunkt $s \in I$ durch die Anfangsenergie

$$\frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

beschränkt wird, was physikalisch sinnvoll erscheint. Dabei beschreibt der erste Summand die kinetische Energie zum Zeitpunkt $s \in I$ und der zweite Summand die bis zum Zeitpunkt s durch Reibung dissipierte Energie. Darüberhinaus ist der zweite Summand der linken Seite von (0.3) wohldefiniert, falls für fast alle $t \in I$ gilt

$$\tilde{u}(t) \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

[1] An dieser Stelle sei daran erinnert, dass die Größe $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)}$ dank der Poincaré-Ungleichung eine zur $W^{1,2}(\Omega)$-Norm äquivalente Norm auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ definiert.

und zusätzlich die Abbildung

$$t \mapsto \|\tilde{u}(t)\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

in $L^2(I)$ liegt. Wir fassen diese beiden Forderungen in der zunächst formalen aber suggestiven Schreibweise

$$\tilde{u} \in L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega))$$

zusammen. Analog liefert der erste Summand formal

$$\tilde{u} \in L^\infty(I, L^2(\Omega)).$$

Ausgehend von der Existenz einer klassischen Lösung u von (0.1) ergeben sich somit kanonische Funktionenräume für eine zugehörige (schwache) Lösung $\tilde{u}$: Die Funktion $\tilde{u}$ muss in dem Bochnerraum

$$L^\infty(I, L^2(\Omega)) \cap L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega))$$

liegen. Vergleichen wir unsere ursprünglichen Differenzierbarkeitsanforderungen an u mit den durch die Struktur der Gleichung induzierten Anforderungen an $\tilde{u}$, erkennen wir, dass wir die Energieungleichung für $\tilde{u}$ mit schwächeren Regularitätsforderungen rechtfertigen können. In (0.3) kommt keine Zeitableitung mehr vor, der Zeitableitungsterm liefert allerdings formal die Information $\tilde{u} \in L^\infty(I, L^2(\Omega))$. Außerdem sind wir durch partielle Integration eine Ortsableitung losgeworden und (0.3) ist bereits wohldefiniert falls $u(t,\cdot) = \tilde{u}(t) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt und die Abbildung $t \mapsto \|\tilde{u}(t)\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ in $L^2(I)$ liegt. Das heißt insbesondere, dass wir für (0.3) lediglich fordern müssen, dass u einmal schwach differenzierbar im Ort ist.
Wir werden sehen, dass es sinnvoll ist, eine Funktion $u : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ schwache Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung (0.1) zu Anfangsdaten $u_0 \in L^2(\Omega)$ zu nennen, falls die folgenden Punkte erfüllt sind:

- **Regularität:** Für die u zugeordnete Funktion gilt $\tilde{u} \in L^\infty(I, L^2(\Omega)) \cap L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega))$.
- **schwache Formulierung:** Die Funktion $\tilde{u}$ erfüllt die Identität

$$\int_I \big(\tilde{u}(t), \partial_t \varphi(t)\big)_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}t + \int_I \big\langle \tilde{u}(t), \varphi(t) \big\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} \mathrm{d}t = 0$$

  für alle „geeigneten“ Testfunktionen φ.
- **Anfangsbedingung:** Die Funktion $\tilde{u}$ erfüllt die Anfangsbedinguing $\tilde{u}(0) = u_0$, wobei zu klären sein wird, in welchem Raum die Gleichheit aufzufassen ist und ob die Auswertung von $\tilde{u}$ zur Zeit 0 überhaupt wohldefiniert ist.

Am Beispiel der Wärmeleitungsgleichung haben wir erste typische Schritte für die Behandlung von Evolutionsproblemen kennengelernt. Die Vorlesung beschäftigt sich vorrangig mit den technischen Hilfsmitteln, die für die (schwache) Existenztheorie im Kontext linearer und nichtlinearer Evolutionsproblemen notwendig sind. Im Mittelpunkt stehen dabei die Bochnerräume selbst, da sie den natürlichen funktionalanalytischen Rahmen für Evolutionsprobleme bilden.
Wie wir oben gesehen haben, beinhaltet die schwache Formulierung von Evolutionsproblemen geeignete Integralidentitäten, die für eine dem Problem angepasste Klasse von Testfunktionen erfüllt sein müssen. Insbesondere kann man diese Integralidentitäten als Operatorgleichung in Dualräumen geeigneter Funktionenräume lesen. Die Realisierung von Dualitätsprodukten in Bochnerräumen, und die damit verbundene Frage nach der Reflexivität und Separabilität dieser Räume, bilden daher weitere Schwerpunkte des Stoffes.
Um zu rechtfertigen, in welchem Sinn eine schwache Lösung eine gegebene Anfangsbedingung erfüllt, werden wir uns außerdem mit der Stetigkeit schwach differenzierbarer Funktionen mit Werten in Banachräumen beschäftigen. Dabei wird uns der Begriff der Zeitableitung im Sinne vektorwertiger Distributionen in zweierlei Hinsicht begegnen. Einerseits liefert er die Grundlage für eine allgemeine Regel zur partiellen Integration Banachraum-wertiger Funktionen. In diesem Zuge wird dann die eben diskutierte Frage nach der Stetigkeit und der Wohldefiniertheit von punktweisen Auswertungen geklärt. Andererseits ist die Zeitableitung im Sinne vektorwertiger Distributionen aber auch Ausgangspunkt für das Kompaktheitslemma von Aubin und Lions, was eines der wichtigsten Hilfsmittel zur Behandlung nichtlinearer Evolutionsgleichungen ist.
Als zusammenfassende Anwendung der oben aufgeführten Resultate beweisen wir Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung der (linearen) Wärmeleitungsgleichung (0.1). Das entsprechende Resultat für eine nichtlineare Wärmeleitungsgleichung der Form

$$
\begin{aligned}
\partial_t u - \Delta u &= f(u) && \text{in } I \times \Omega, \\
u &= 0 && \text{in } I \times \partial\Omega, \\
u(0) &= u_0 && \text{in } \Omega.
\end{aligned}
\tag{0.4}
$$

ist technisch aufwändiger. Der Existenzbeweis setzt sich aus Kombination einer Linearisierung der Gleichung mit dem Schauderschen Fixpunktsatz für kompakte Operatoren zusammen. Um diese Beweismethode für nichtlineare Probleme verständlicher zu machen, werden wir sie zunächst an einer nichtlinearen elliptischen Gleichung vorstellen. Die im elliptischen Fall verwendeten Kompaktheitsargumente sind direkte Folgerungen aus dem Rellichschen Einbettungssatz. Wie wir sehen werden, wird diese Rolle im nichtlinearen instationären Fall vom Lemma von Aubin-Lions übernommen.

1 Das Bochner-Integral

Wir haben in der Einführung gesehen, dass Evolutionsprobleme Anlass geben, Funktionen zwischen einem (beschränkten) Zeitintervall I und einem Banachraum X zu betrachten. Aus der Lebesgue'schen Integrationstheorie wissen wir, dass eine Funktion auf I mit Werten in $X = \mathbb{R}$ genau dann (Lebesgue-)messbar ist, falls sie fast überall der punktweise Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen ist. Das Lebesgue-Integral von nichtnegativen Funktionen kann dann als Grenzwert von Integralen einer geeigneten Folge von Treppenfunktionen definiert werden.
Unser erstes Ziel besteht darin, die Lebesgue'sche Integrationstheorie auf Banachraum-wertige Funktionen zu erweitern. In diesem Zusammenhang dient die Approximierbarkeit mittels Treppenfunktionen als Ausgangspunkt für den Begriff der Bochner-Messbarkeit, die wiederum Ausgangspunkt für die Integrationstheorie Banachraum-wertiger Funktionen ist.

1.1 Bochner-Messbarkeit

Definition 1.1 (Treppenfunktion)
Eine Funktion $s : I \to X$ heißt ***Treppenfunktion****, falls paarweise disjunkte, Lebesgue-messbare Mengen $B_i \subset I$ mit endlichem Lebesgue-Maß $\lambda(B_i) < \infty$, $i = 1, ..., n$, und Elemente $x_i \in X$, $i = 1, ..., n$, existieren, sodass sich s schreiben lässt als*

$$s = \sum_{i=1}^{n} x_i \ \chi_{B_i}.$$

Hierbei bezeichnet $\chi_{B_i} : I \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion einer Menge B_i, die definiert ist als

$$\chi_{B_i}(t) = \begin{cases} 1, & t \in B_i, \\ 0, & t \notin B_i. \end{cases}$$

Die Menge der Treppenfunktionen auf I mit Werten in X bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(I, X)$.

Definition 1.2 (Bochner-Messbarkeit)
Eine Funktion $u : I \to X$ heißt ***Bochner-messbar****, falls eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(I, X)$ von Treppenfunktionen existiert, sodass für fast alle $t \in I$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n(t) - u(t)\|_X = 0.$$

Die Definition der Bochner-Messbarkeit liefert sofort

Lemma 1.3 (u Bochner-messbar $\Rightarrow \|u(\cdot)\|$ Lebesgue-messbar)
Falls $u : I \to X$ Bochner-messbar ist, so ist die reellwertige Funktion

$$\begin{aligned} \|u(\cdot)\|_X : I &\to \mathbb{R}, \\ t &\mapsto \|u(t)\|_X \,, \end{aligned}$$

Lebesgue-messbar.

Beweis. Da u Bochner-messbar ist, exisitiert eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(I,X)$, so dass für fast alle $t \in I$ für $n \to \infty$ gilt

$$s_n(t) \to u(t) \text{ in } X.$$

Die Funktionen $\|s_n(\cdot)\|_X : I \to \mathbb{R}$ sind Treppenfunktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ und somit Lebesgue-messbar. Außerdem gilt für fast alle $t \in I$

$$\lim_{n\to\infty} \Big| \|u(t)\|_X - \|s_n(t)\|_X \Big| \leq \lim_{n\to\infty} \|u(t) - s_n(t)\|_X = 0.$$

Die Funktion $\|u(\cdot)\|_X$ ist somit als fast-überall-Grenzwert einer Folge von Lebesgue-messbaren Funktionen selbst Lebesgue-messbar. □

1.2 Bochner-Integrierbarkeit

Definition 1.4 (Bochner-Integral von Treppenfunktionen)
Sei

$$s = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{B_i} : I \to X$$

*eine Treppenfunktion im Sinne von Definition 1.1. Dann ist das **Bochner-Integral** von s definiert als*

$$\int_I s(t)\,\mathrm{d}t := \sum_{i=1}^{n} x_i\, \lambda(B_i).$$

Aus der Definition einer Treppenfunktion sowie der Definition des Bochnerintegrals für Treppenfunktionen ergibt sich unmittelbar

Korollar 1.5 (Elementare Eigenschaften I)

1. *Für $s \in \mathcal{S}(I,X)$ gilt $\int_I s(t)\mathrm{d}t \in X$.*

2. *Das Bochner-Integral ist unabhängig von der Darstellung der Treppenfunktion, das heißt für*

$$s = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{B_i} = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{C_j}$$

gilt

$$\int_I s(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\lambda(B_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j\,\lambda(C_j).$$

3. *Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $s_1, s_2 \in \mathcal{S}(I, X)$ gilt*

$$\int_I (\alpha s_1 + \beta s_2)(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_I s_1(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_I s_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. *Für $s \in \mathcal{S}(I, X)$ gilt*

$$\left\| \int_I s(t)\,\mathrm{d}t \right\|_X \leq \int_I \|s(t)\|_X\,\mathrm{d}t$$

und die rechte Seite ist wohldefiniert als Lebesgue-Integral.

Beweis. Blatt 2, Aufgabe 2 □

Bemerkung 1.6

Wegen Korollar 1.5 induziert das Bochner-Integral eine lineare, stetige Abbildung

$$\int_I \cdot\,\mathrm{d}t : \mathcal{S}(I, X) \to X$$
$$s \mapsto \int_I s(t)\,\mathrm{d}t.$$

Definition 1.7 (Bochner-integrierbar, Bochner-Integral)

Eine Funktion $u : I \to X$ heißt ***Bochner-integrierbar****, falls eine Folge von Treppenfunktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(I, X)$ existiert mit*

$$(1)\ \lim_{n\to\infty} s_n(t) = u(t) \text{ für fast alle } t \in I \text{ und} \tag{1.8}$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty} \int_I \|s_n(t) - u(t)\|_X\,\mathrm{d}t = 0. \tag{1.9}$$

Für eine Bochner-integrierbare Funktion $u : I \to X$ definieren wir das ***Bochner-Integral*** *von u durch*

$$\int_I u(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{n\to\infty} \int_I s_n(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.10}$$

Die Menge der Bochner-integrierbaren Funktionen auf I mit Werten in X bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^1(I, X)$.

Bemerkung 1.11 (Forderungen in Definition 1.7)

1. *Die Forderung (1.8) besagt insbesondere, dass eine Bochner-intergrierbare Funktion u Bochner-messbar sein muss.*
2. *Die Forderung (1.9) ist sinnvoll, denn nach Lemma 1.3 ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die reellwertige Funktion $t \to \|s_n(t) - u(t)\|_X$ Lebesgue-messbar und damit ist*

$$\int_I \|s_n(t) - u(t)\|_X \,\mathrm{d}t$$

als Lebesgue-Integral definiert.

3. *Das Bochner-Integral einer Bochner-integrierbaren Funktion ist unabhängig von der approximierenden Folge von Treppenfunktionen, denn für zwei approximierende Folgen $(s_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt für $n \to \infty$*

$$\begin{aligned}\left\| \int_I s_n^1(t) - s_n^2(t) \,\mathrm{d}t \right\|_X &\leq \int_I \|s_n^1(t) - s_n^2(t)\|_X \,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_I \|s_n^1(t) - u(t)\|_X \,\mathrm{d}t + \int_I \|u(t) - s_n^2(t)\|_X \,\mathrm{d}t \to 0,\end{aligned}$$

und somit folgt (da beide Grenzwerte existieren)

$$\lim_{n\to\infty} \int_I s_n^1(t) \,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_I s_n^2(t) \,\mathrm{d}t = \int_I u(t) \,\mathrm{d}t.$$

Einen ersten Zusammenhang zwischen Bochner- und Lebesgue-Integrierbarkeit liefert

Satz 1.12 (Bochner-Kriterium)
Eine Funktion $u : I \to X$ ist genau dann Bochner-integrierbar wenn u Bochner-messbar und die Funktion $\|u(\cdot)\|_X : I \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist.

Beweis. Sei zunächst u Bochner-integrierbar. Dann ist u per Definition Bochner-messbar. Insbesondere existiert eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(I, X)$, so dass für $n \to \infty$ für fast alle $t \in I$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_n(t) = u(t) \text{ in } X.$$

Nach Lemma 1.3 ist $\|u(\cdot)\|_X$ Lebesgue-messbar und außerdem gilt mit der Dreiecksungleichung

$$\int_I \|u(t)\|_X \,\mathrm{d}t \leq \int_I \|s_n(t) - u(t)\|_X \,\mathrm{d}t + \int_I \|s_n(t)\|_X \,\mathrm{d}t < \infty,$$

denn für hinreichend grosses $n \in \mathbb{N}$ konvergiert der erste Summand gegen Null und der zweite Summand ist wegen $s_n \in \mathcal{S}(I,X)$ beschränkt. Also ist $\|u(\cdot)\|_X$ auch Lebesgue-integrierbar.
Sei nun u Bochner-messbar und $\|u(\cdot)\|_X$ Lebesgue-integrierbar. Für eine approximierende Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(I,X)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} s_n(t) = u(t) \text{ in } X$$

für fast alle $t \in I$, definieren wir eine weitere Folge von Treppenfunktionen durch

$$k_n := s_n \; \chi_{\{t\in I \;|\; \|s_n(t)\|_X \leq 2\|u(t)\|_X\}}.$$

Dann gilt, wie man leicht nachrechnet, für $n \to \infty$ für fast alle $t \in I$

$$\lim_{n\to\infty} k_n(t) = u(t) \text{ in } X.$$

Außerdem gilt

$$\|k_n(t) - u(t)\|_X \leq 3\|u(t)\|_X,$$

wobei $\|u(\cdot)\|_X$ nach Voraussetzung Lebesgue-integrierbar ist. Der Satz über majorisierte Konvergenz von Lebesgue liefert daher

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|k_n(t) - u(t)\|_X \,\mathrm{d}t = 0$$

und somit ist u Bochner-integrierbar. □

Definition 1.13
Wir definieren wie in der Lebesgue'schen Theorie

$$L^1(I,X) := \mathcal{L}^1(I,X)_{/\sim},$$

wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben sei durch „Gleichheit fast überall“. Wir definieren außerdem

$$\|u\|_{L^1(I,X)} := \int_I \|u(t)\|_X \,\mathrm{d}t.$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass $\|\cdot\|_{L^1(I,X)}$ eine Norm auf $L^1(I,X)$ liefert.

Das Bochner-Kriterium liefert zu einer Bochner-integrierbaren Funktion u eine Folge von Treppenfunktionen, die punktweise von “unten” und in der $L^1(I,X)$-Norm gegen u konvergiert. Die elementaren Eigenschaften des Bochner-Integrals von Treppenfunktionen lassen sich daher leicht mit einem Dichtheitsargument auf Bochner-integrierbare Funktionen übertragen.

Lemma 1.14 (Elementare Eigenschaften II)

1. *Für $u \in L^1(I, X)$ gilt*
$$\left\| \int_I u(t)\,\mathrm{d}t \right\|_X \leq \int_I \|u(t)\|_X \,\mathrm{d}t.$$
2. *Seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ ein linearer, stetiger Operator. Für $u \in L^1(I, X)$ sei*
$$\begin{aligned} Tu &: I \to Y, \\ (Tu)(t) &:= Tu(t). \end{aligned}$$
Dann gilt $Tu \in L^1(I, Y)$ und
$$T\left(\int_I u(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_I Tu(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. *Für alle $u \in L^1(I, X)$ und alle $F \in X^*$ ist die reelle Funktion $t \mapsto \langle F, u(\cdot)\rangle_X$ Lebesgue-integrierbar und es gilt*
$$\left\langle F, \int_I u(t)\mathrm{d}t \right\rangle_X = \int_I \langle F, u(t)\rangle_X \,\mathrm{d}t.$$
Hierbei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ die duale Paarung im Banachraum X.

Beweis. Blatt 2, Aufgabe 2 □

1.3 Schwache Messbarkeit und Satz von Pettis

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir das Konzept der Bochner-Messbarkeit, in der Literatur meist auch starke Messbarkeit genannt, kennengelernt. Als unmittelbare Folgerung der Bochner-Messbarkeit einer Funktion $u : I \to X$ ergab sich in Lemma 1.3 die Lebesgue-Messbarkeit der Funktion $\|u(\cdot)\|_X : I \to \mathbb{R}$ und, unter der zusätzlichen Voraussetzung der Bochner-Integrierbarkeit von u, die Lebesgue-Integrierbarkeit der Funktion $\|u(\cdot)\|_X$ in Satz 1.12.
Wir stellen fest, dass das Konzept der Bochner-Messbarkeit einerseits wesentlich für die bisherigen Resultate war, wir aber andererseits noch kein wirklich „handliches" Kriterium für ihren Nachweis haben. Der Satz von Pettis liefert genau solch ein Kriterium im Falle der Separabilität des Bildraums X.
Die Forderung der Separabilität von X ist dabei keine wesentliche Einschränkung für die Anwendung: In der Motivation mit Hilfe der Wärmeleitungsgleichung war X entweder ein klassischer Lebesgue- oder ein Sobolevraum. Diese Räume sind jedoch für die Skala

von Integrationsexponenten $1 < p < \infty$ stets separabel.
Den Preis, den wir für den Satz von Pettis bezahlen müssen, ist das Konzept der sogenannten schwachen Messbarkeit. Der Definition der schwachen Messbarkeit stellen wir zunächst eine Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach voran.

Satz 1.15 (Folgerung aus Hahn-Banach)
Sei X ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|_X$. Dann existiert wegen des Fortsetzungssatzes von Hahn-Banach für alle $x \in X$ (mindestens) ein $f_x \in X^*$ mit

$$\|f_x\|_{X^*} = \|x\|_X \text{ und } \langle f_x, x\rangle_X = \|x\|_X^2.$$

Insbesondere definiert die Zuordnung $x \mapsto f_x$ eine im Allgemeinen mengenwertige Abbildung

$$\begin{aligned}&\mathcal{J} : X \to X^*,\\ &\mathcal{J}x := \left\{ f \in X^* \,\middle|\, \langle f, x\rangle_X = \|x\|_X^2 = \|f\|_{X^*}^2 \right\}.\end{aligned}$$

*In der Literatur wird $\mathcal{J}$ **Dualitätsabbildung** (bzgl $\|\cdot\|_X$) genannt. Setzen wir $f = \|x\|^{-1} f_x$ so sehen wir, dass für alle $x \in X$ (mindestens) ein $f \in X^*$ existiert mit*

$$\|f\|_{X^*} = 1 \text{ und } \langle f, x\rangle_X = \|x\|_X.$$

Der Satz von Hahn-Banach sichert die Fortsetzbarkeit linearer Funktionale. Aber erst der eben zitierte Satz liefert die Tatsache, dass der Dualraum X^* eines Banachraums X in gewisser Weise reichhaltig genug ist, um sich mit ihm zu beschäftigen.
Der Ausgangspunkt der schwachen Messbarkeit einer Funktion $u : I \to X$, ist die Untersuchung der Lebesgue-Messbarkeit der durch $f \in X^*$ indizierten Funktionenschwar

$$t \mapsto \langle f, u(t)\rangle_X. \tag{1.16}$$

Der Satz von Pettis besagt, dass die Lebesgue-Messbarkeit der Abbildungsschar in (1.16) äquivalent ist zur Bochner-Messbarkeit der Funktion $u : I \to X$, falls der Raum X separabel ist.
Bevor wir jedoch zu diesem Ergebnis gelangen, brauchen wir einige technische Hilfsmittel. Wir orientieren uns dabei an der Darstellung von [Wlo82], formulieren die Ergebnisse jedoch für Banachräume und nicht nur für Hilberträume.
Im Folgenden sei wieder $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum.

Definition 1.17 (Schwache Messbarkeit, separabelwertig,...)
Eine Funktion $u : I \to X$ heißt

1. ***schwach messbar**, falls die reelle Funktion $\langle f, u(\cdot)\rangle_X : I \to \mathbb{R}$ für alle $f \in X^*$ Lebesgue-messbar ist,*

2. ***abzählbarwertig**, falls*

$$\mathrm{Im}(u) := \left\{ x \in X \,\middle|\, \exists t \in I \text{ mit } u(t) = x \right\}$$

abzählbar ist und für alle $x \in \mathrm{Im}(u)$ die Menge $B_x := u^{-1}(x) = \{t \in I \,|\, u(t) = x\}$ Lebesgue-messbar ist, das heißt, dass $B_x \in \mathscr{B}(I)$ gilt, wobei $\mathscr{B}(I)$ die Borel'sche σ-Algebra auf I bezeichne,

3. ***separabelwertig**, falls* $\mathrm{Im}(u)$ *separabel ist,*

4. ***fast separabelwertig**, falls eine Lebesgue-Nullmenge $B_0 \in \mathscr{B}(I)$ existiert, sodass* $\mathrm{Im}(u_{|I \setminus B_0})$ *separabel ist,*

5. ***endlichwertig oder Treppenfunktion**, falls paarweise disjunkte, Lebesgue-messbare Mengen B_i mit endlichem Lebesgue-Maßund Funktionswerte $x_i \neq 0, i = 1, ..., n$, existieren, so dass gilt*

$$\begin{aligned} u(t) &= x_i \textit{ für alle } t \in B_i \textit{ und} \\ u(t) &= 0 \textit{ für alle } t \in I \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i. \end{aligned}$$

Nun haben wir alle notwendigen Definitionen für den folgenden Satz.

Satz 1.18 (Pettis)
Eine Funktion $u : I \to X$ ist genau dann Bochner-messbar, wenn u schwach messbar und fast separabelwertig ist.

Bemerkung 1.19
Insbesondere gilt: Ist X ein separabler Banachraum, so sind Bochner-Messbarkeit und schwache Messbarkeit äquivalent.

Beweis. Sei zunächst $u : I \to X$ Bochner-messbar. Nach Definition 1.2 existiert dann eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(I, X)$ von Treppenfunktionen mit

$$\lim_{n \to \infty} s_n(t) = u(t)$$

für fast alle $t \in I$. Insbesondere existiert ein $B_0 \in \mathscr{B}(I)$ mit $\lambda(B_0) = 0$ und

$$\lim_{n \to \infty} s_n(t) = u(t) \text{ für alle } t \in I \setminus B_0.$$

Dann gilt aber für jedes $f \in X^*$ und für alle $t \in I \setminus B_0$

$$\lim_{n \to \infty} \langle f, s_n(t) \rangle_X = \langle f, u(t) \rangle_X.$$

Da $\langle f, s_n(\cdot)\rangle_X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ als reelle Treppenfunktion Lebesgue-messbar ist, ist auch $\langle f, u(\cdot)\rangle_X$ als fast-überall-Grenzwert Lebesgue-messbar. Das heißt u ist schwach messbar. Darüber hinaus ist jede Treppenfunktion s_n endlichwertig und damit gilt:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Im}(s_n) \text{ ist abzählbar und}$$
$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Im}(s_n)}^{\|\cdot\|_X} \text{ ist separabel.}$$

Außerdem ist u fast separabelwertig, da

$$\operatorname{Im}(u_{|I\setminus B_0}) = \bigcup_{t\in I\setminus B_0} \{u(t)\} \subset \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Im}(s_n)}^{\|\cdot\|_X}.$$

Sei nun u schwach messbar und fast separabelwertig. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass X selbst separabel ist, da wir andernfalls X durch den separablen Banachraum

$$\overline{\operatorname{span}\operatorname{Im}(u_{|I\setminus B_0})}^{\|\cdot\|_X} \subset X$$

ersetzen können. In einem ersten Schritt zeigen wir jetzt, dass $\|u(\cdot)\|_X$ Lebesgue-messbar ist. Anschließend konstruieren wir in einem zweiten Schritt eine Folge von Treppenfunktionen, die u im Sinne der Bochner-Messbarkeit approximiert.
Für den ersten Schritt benötigen wir folgende technische Aussage, die in [Bré11] oder in [Yos80] bewiesen wird.

Proposition 1.20
Sei X ein separabler Banachraum. Dann gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ mit $\|f_n\|_{X^*} \leq 1$, sodass für alle $f_0 \in X^*$ mit $\|f_0\|_{X^*} \leq 1$ eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit

$$\lim_{k\to\infty} \langle f_{n_k}, x\rangle_X = \langle f_0, x\rangle_X \text{ für alle } x \in X.$$

Insbesondere ist die Einheitskugel im Dualraum eines separablen Banachraums separabel bezüglich der $*$-schwachen Topologie.

Für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ sei nun

$$A := \left\{ t \in I \,\middle|\, \|u(t)\|_X \leq a \right\} \text{ und}$$
$$A_f := \left\{ t \in I \,\middle|\, |\langle f, u(t)\rangle_X| \leq a \right\} \text{ für } f \in X^*.$$

Da u schwach messbar ist, ist A_f für jedes $f \in X^*$ eine Lebesgue-messbare Menge. Wenn wir zeigen können, dass es eine Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X^*$ gibt mit

$$A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_{f_j},$$

so ist A als abzählbarer Schnitt Lebesgue-messbare Mengen selbst Lebesgue-messbar und somit ist auch $\|u(\cdot)\|_X : I \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar. Satz 1.15 liefert die Normformel

$$\|x\|_X = \sup_{\|f\|_{X^*}\leq 1} \langle f, x\rangle_X$$

und daher gilt

$$A \subset \bigcap_{\|f\|_{X^*}\leq 1} A_f.$$

Außerdem existiert wegen Satz 1.15 für jedes $t \in I$ ein $f \in X^*$ mit $\|f\|_{X^*} = 1$ und $\|u(t)\|_X = \langle f, u(t)\rangle_X$. Daher gilt

$$\bigcap_{\|f\|_{X^*}\leq 1} A_f \subset A \text{ und somit } \bigcap_{\|f\|_{X^*}\leq 1} A_f = A.$$

Wegen der $*$-schwachen Separabilität der Einheitskugel in X^* existiert eine Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X^*$ mit $\|f_j\|_{X^*} \leq 1$ und

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{f_j} = \bigcap_{\|f\|_{X^*}\leq 1} A_f = A.$$

Nun konstruieren wir die gesuchte Folge von Treppenfunktionen: Da X separabel ist, existieren zu jedem festen $n \in \mathbb{N}$ offene Kugeln $\big(K^j_{1/n}(x_{j,n})\big)_{j\in\mathbb{N}}$ mit Mittelpunkten $(x_{j,n})_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ und Radius $\frac{1}{n}$, sodass gilt

$$\operatorname{Im}(u) \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K^j_{1/n}(x_{j,n}).$$

Da $\|u(\cdot)\|_X$ Lebesgue-messbar ist, ist für jedes $j \in \mathbb{N}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ auch $\|u(\cdot) - x_{j,n}\|_X$ Lebesgue-messbar, das heißt, die Menge

$$B_{j,n} := \left\{ t \in I \,\middle|\, u(t) \in K^j_{1/n}(x_{j,n}) \right\}$$

ist eine Lebesgue-messbare Menge und es gilt

$$I = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_{j,n}.$$

Wir definieren daher Funktionen

$$\widetilde{s_n}(t) := \begin{cases} x_{i,n}, & \text{falls } t \in \widetilde{B}_{i,n} := B_{i,n} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_{j,n}, \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Dann sind die Mengen $\widetilde{B}_{i,n}$ Lebesgue-messbar, paarweise disjunkt und es gilt

$$I = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \widetilde{B}_{i,n}.$$

Weil für alle $t \in I$ per Konstruktion der Funktionen $\widetilde{s_n}$

$$\|u(t) - \widetilde{s_n}(t)\|_X < \frac{1}{n}$$

gilt, folgt schließlich für alle $t \in I$

$$\lim_{n \to \infty} \widetilde{s_n}(t) = u(t) \text{ in } X.$$

Die $\widetilde{s_n}$ sind nur abzählbarwertig; unsere Definition der Bochner-Messbarkeit verlangt jedoch, dass die approximierende Folge aus Treppenfunktionen, also insbesondere endlichwertigen Funktionen besteht. Die Tatsache, dass man im separablen Fall abzählbarwertige Funktionen durch endlichwertige Treppenfunktionen approximieren kann ist naheliegend, der Beweis ist jedoch nicht ganz einfach, da er noch zwei weitere Sätze aus der Maßtheorie benutzt. Wir werden den Beweis dieser Aussage später zeigen, nehmen ihre Gültigkeit jedoch für den Moment an, um den Beweis des Satzes von Pettis zu beenden. □

Zunächst geben wir einige Folgerungen aus dem Satz von Pettis

Folgerung 1.21

Sei X ein separabler Banachraum und $u : I \to X$ eine Funktion. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : I \to X$ eine Folge Bochner-messbarer Funktionen und es gelte $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ für fast alle $t \in I$. Dann ist auch u Bochner-messbar; insbesondere ist Bochner-Messbarkeit stabil unter schwacher Konvergenz.

Beweis. Blatt 3, Aufgabe 1 □

Folgerung 1.22

1. *Sei H ein separabler Hilbertraum und $u, v : I \to H$ schwach messbar. Dann ist die Funktion $(u(\cdot), v(\cdot))_H : I \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar.*
2. *Sei X ein separabler, reflexiver[1] Banachraum und $u : I \to X$ und $f : I \to X^*$ seien schwach messbar. Dann ist die Funktion $\langle f(\cdot), u(\cdot)\rangle_X : I \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar.*

Beweis. Blatt 3, Aufgabe 2 □

[1] Das heißt, die kanonische Isometrie $J_X : X \to X^{**}$ definiert durch $\langle J_X x, f\rangle_{X^*} := \langle f, x\rangle_X$ ist surjektiv

1.4 Appendix zum Satz von Pettis

Bevor wir die noch ausstehende Behauptung im Beweis des Satzes von Pettis nachholen, erwähnen wir noch zwei weitere Sätze, die sinngemäß aus der klassischen Maßtheorie bekannt sein sollten. Die Beweise findet der interessierte Leser in [Wlo82].

Definition 1.23 (Fast gleichmäßige Konvergenz)
Eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : I \to X$ ***konvergiert fast gleichmäßig*** *gegen* $u : I \to X$*, falls für alle* $\varepsilon > 0$ *eine Lebesgue-messbare Menge* F *mit* $\lambda(F) < \varepsilon$ *existiert, so dass für* $n \to \infty$ *gilt*

$$u_n \to u \text{ gleichmäßig auf } I \setminus F.$$

Satz 1.24 (Egorov)
Sei X *ein separabler Banachraum. Seien* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, u : I \to X$ *schwach messbar und es gelte* $\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$ *für fast alle* $t \in I$*. Dann konvergiert* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *fast gleichmäßig gegen* u*.*

Definition 1.25 (Konvergenz nach Maß)
Eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : I \to X$ *schwach messbarer Funktionen* ***konvergiert nach Maß*** *gegen eine schwach messbare Funktion* $u : I \to X$*, falls für alle* $\varepsilon > 0$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(\{t \in I \mid \|u_n(t) - u(t)\|_X \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Wie auch im klassischen Fall impliziert fast gleichmäßige Konvergenz die Konvergenz nach Maß.
Hat I endliches Maß, so ist die Konvergenz nach Maß außerdem **metrisierbar**, das heißt auf dem Raum der schwach messbaren Funktionen existiert eine Metrik, die die gleiche Topologie wie die Konvergenz nach Maß erzeugt. Diese Metrik ist gegeben durch

$$d(u,v) := \int_I \min\{1, \|u(t) - v(t)\|_X\} \,\mathrm{d}t. \tag{1.26}$$

Es gilt dann der folgende Kompaktheitssatz.

Satz 1.27
Sei X *ein separabler Banachraum. Seien* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, u : I \to X$ *schwach messbar und es gelte* $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ *nach Maß. Dann exisitert eine Teilfolge* $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$*, die fast gleichmäßig gegen* u *konvergiert.*

Kommen wir nun zum noch ausstehenden Beweis der Behauptung aus dem letzten Teil des Beweises vom Satz von Pettis.

Lemma 1.28

Sei X ein separabler Banachraum und $u : I \to X$ schwach messbar. Dann ist u Bochner-messbar; insbesondere existiert eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(I,X)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} s_n(t) = u(t) \text{ in } X \text{ für fast alle } t \in I.$$

Beweis. Im Beweis des Satzes von Pettis hatten wir bereits eine Folge abzählbarwertiger, schwach messbarer Funktionen $(\widetilde{s}_l)_{l\in\mathbb{N}}$ konstruiert, so dass für fast alle $t \in I$ gilt

$$\lim_{l\to\infty} \widetilde{s}_l(t) = u(t) \text{ in } X$$

Aufgrund des Satzes von Egorov konvergiert $(\widetilde{s}_l)_{l\in\mathbb{N}}$ fast gleichmäßig gegen u. Diese Tatsache impliziert die Konvergenz von $(\widetilde{s}_l)_{l\in\mathbb{N}}$ gegen u nach Maß und schließlich gilt mit der in (1.26) definierten Metrik auch

$$\lim_{l\to\infty} d(\widetilde{s}_l, u) = 0.$$

Betrachten wir nun eine beliebige abzählbarwertige Funktion $v : I \to X$ mit

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \chi_{B_k},$$

wobei für alle $k \in \mathbb{N}$ gelte $y_k \in X$ und $B_k \in \mathscr{B}(I)$. Setzen wir

$$v_n := \sum_{k=1}^{n} y_k \chi_{B_k},$$

so gilt $v_n \in \mathcal{S}(I,X)$ und

$$v_n = v \text{ auf } I \setminus \bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k.$$

Wegen $I = \bigcup_k B_k$ und $\lambda(I) < \infty$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\lambda\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda(B_k) < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0(\varepsilon).$$

Dann sieht man aber leicht, dass $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(I,X)$ fast gleichmäßig gegen v konvergiert. Für festes $l \in \mathbb{N}$ finden wir daher eine Folge $(s^l_m)_{m\in N} \subset \mathcal{S}(I,X)$, die für $m \to \infty$ fast gleichmäßig gegen $\widetilde{s}_l$ konvergiert. Mit der gleichen Begründung wie oben gilt dann auch

$$\lim_{m\to\infty} d(s^l_m, \widetilde{s}_l) = 0.$$

Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ finden wir also Zahlen $l_k \in \mathbb{N}$ und $m_k \in \mathbb{N}$ mit

$$d(\widetilde{s_{l_k}}, u) \leq \frac{1}{2k},$$
$$d(s_{m_k}^{l_k}, \widetilde{s_{l_k}}) \leq \frac{1}{2k}.$$

Daraus folgt

$$d(s_{m_k}^{l_k}, u) \leq d(s_{m_k}^{l_k}, \widetilde{s_{l_k}}) + d(\widetilde{s_{l_k}}, u) \leq \frac{1}{k}$$

und daher

$$\lim_{k\to\infty} d(s_{m_k}^{l_k}, u) = 0.$$

Wegen der Metrisierbarkeit der Konvergenz nach Maß gilt daher äquivalent

$$s_{m_k}^{l_k} \to u \text{ nach Maß für } k \to \infty.$$

Nach dem Kompaktheitssatz 1.27 existiert eine Teilfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (s_{m_k}^{l_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(I, X)$, die fast gleichmäßig gegen den gleichen Grenzwert, also gegen u, konvergiert. Das heißt also: Für jedes $\varepsilon > 0$ exisitiert eine Menge $F_\varepsilon \in \mathscr{B}(I)$ mit $\lambda(F_\varepsilon) < \varepsilon$ und

$$s_n \to u \text{ gleichmäßig auf } I \setminus F_\varepsilon.$$

Wir setzen schließlich

$$F := \bigcap_{\varepsilon>0} F_\varepsilon.$$

Dann gilt $\lambda(F) \leq \lambda(F_\varepsilon) \leq \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, das heißt F ist eine Lebesgue-Nullmenge, und für alle $t \in I \setminus F$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_n(t) = u(t) \text{ in } X$$

Damit haben wir die Bochner-Messbarkeit von u gezeigt. □

Bemerkung 1.29

Die Definition der Bochner-Messbarkeit ist in der Literatur nicht einheitlich: In [Yos80] wird Bochner-Messbarkeit direkt durch fast-überall-Approximierbarkeit mittels abzählbarwertiger Funktionen definiert. Um mit [Růž04] konsistent zu bleiben, halten wir uns aber an die dortigen Definitionen.

2 Bochnerräume

Nachdem wir uns im vorherigen Abschnitt ausführlich mit verschiedenen Konzepten der Messbarkeit vektorwertiger Funktionen auseinandergesetzt haben, kommen wir im aktuellen Kapitel zur Definition der Bochnerräume $L^p(I, X)$. Neben der Vollständigkeit der Räume $L^p(I, X)$ für die Skala $1 \leq p \leq \infty$, interessieren wir uns auch für deren Separabilität. Außerdem formulieren wir die für die Anwendung nützlichen Sätze von Vitali, den Satz über majorisierte Konvergenz von Lebesgue und einen Satz über Vertauschbarkeit von Integral und Ableitung im Setting von Bochnerräumen.
So nützlich diese Sätze zweifelsohne sind, so nachvollziehbar machen ihre Beweise jedoch auch folgendes Zitat von Kurt Friedrichs: „What I don't like about measure theory is that you have to say 'almost everywhere' almost everywhere...“

2.1 Definition und erste Eigenschaften

Definition 2.1 ($L^p(I, X)$)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Wir definieren

1. *für $1 \leq p < \infty$*

$$L^p(I, X) := \left\{ u : I \to X \,\middle|\, u \text{ ist Bochner-messbar und } \int_I \|u(t)\|_X^p \, \mathrm{d}t < \infty \right\} \Big/ \sim$$

mit Norm

$$\|u\|_{L^p(I,X)} := \left(\int_I \|u(t)\|_X^p \, \mathrm{d}t \right)^{1/p}$$

2. *und für $p = \infty$*

$$L^\infty(I, X) := \left\{ u : I \to X \,\middle|\, \begin{array}{l} u \text{ ist Bochner-messbar und es existiert } C > 0 \\ \text{mit } \|u(t)\|_X \leq C \text{ für fast alle } t \in I. \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

mit Norm

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(I,X)} &:= \operatorname*{ess\,sup}_{t \in I} \|u(t)\|_X \\ &:= \inf \left\{ C > 0 \,\middle|\, \|u(t)\|_X \leq C \text{ für fast alle } t \in I \right\}. \end{aligned}$$

Dabei ist in beiden Fällen die Äquivalenzrelation $\sim$ durch „Gleichheit fast überall auf I“ definiert.

Bevor wir zur Vollständigkeit von $L^p(I,X)$ kommen, notieren wir einige einfache Folgerungen.

Korollar 2.2

1. *Die Räume $L^p(I,X)$ sind reelle Vektorräume.*
2. *Gilt $X \hookrightarrow Y$ für einen weiteren Banachraum $(Y, \|\cdot\|_Y)$, dann gilt auch*
$$L^p(I,X) \hookrightarrow L^p(I,Y).$$
3. *Ist $T : X \to Y$ linear und stetig, so induziert T einen linearen, stetigen Operator (den wir wieder mit T bezeichnen)*
$$T : L^p(I,X) \to L^p(I,Y).$$

Beweis. Übung □

Auch die Hölder-Ungleichung gilt in Bochnerräumen weiterhin. Zu beachten ist natürlich Folgendes: Sind X, Y beliebige Banachräume und u, v Funktionen mit Werten in X bzw. Y, so ist das Produkt $u(t)v(t)$ in der Regel nicht definiert. Umgehen können wir dieses Problem einfach, falls $Y = X^*$ gilt.

Lemma 2.3 (Hölder)
Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $u \in L^p(I,X)$ und $v \in L^q(I,X^*)$ gilt dann $\langle v(\cdot), u(\cdot)\rangle_X \in L^1(I,\mathbb{R})$ und
$$\int_I |\langle v(t), u(t)\rangle_X| \,\mathrm{d}t \leq \|v\|_{L^q(I,X^*)} \|u\|_{L^p(I,X)} .$$

Beweis. Da u und v Bochner-messbar sind, exisitieren Folgen von Treppenfunktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(I,X)$, $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(I,X^*)$, so dass für fast alle $t \in I$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} s_n(t) = u(t) \text{ in } X$$
$$\lim_{n\to\infty} k_n(t) = v(t) \text{ in } X^*.$$

Daher konvergiert die Folge Lebesgue-messbarer Funktionen $\left(\langle k_n(\cdot), s_n(\cdot)\rangle_X\right)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen $\langle v(\cdot), u(\cdot)\rangle_X$ und $\langle v(\cdot), u(\cdot)\rangle_X$ ist daher Lebesgue-messbar.
Satz 1.12 liefert $\|u(\cdot)\|_X \in L^p(I)$ und $\|v(\cdot)\|_{X^*} \in L^q(I)$. Mit der klassischen Hölder-Ungleichung folgt schließlich
$$\int_I |\langle v(t), u(t)\rangle_X| \,\mathrm{d}t \leq \int_I \|v(t)\|_{X^*} \|u(t)\|_X \,\mathrm{d}t \leq \|v\|_{L^q(I,X^*)} \|u\|_{L^p(I,X)} < \infty.$$
□

Korollar 2.4
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und X, Y und Z Banachräume.

1. *Gilt $u \in L^p(I, X)$, so folgt $u \in L^q(I, X)$ für alle $1 \leq q \leq p$.*
2. *Für $p \leq r \leq q$ gilt*
$$L^p(I, X) \cap L^q(I, X) \hookrightarrow L^r(I, X).$$
3. *Seien $1 \leq p, q, r \leq \infty$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ und sei $B : X \times Y \to Z$ eine stetige, bilineare Abbildung. Dann induziert B eine stetige, bilineare Abbildung (die wir wieder mit B bezeichnen)*
$$\begin{aligned} B : L^p(I, X) \times L^q(I, Y) &\to L^r(I, Z), \\ (u, v) &\mapsto B(u, v), \end{aligned}$$
mit $B(u, v)(t) := B(u(t), v(t))$.

Beweis. Blatt 4, Aufgabe 4 □

2.2 Vollständigkeit

Wir kommen nun zu einem der zentralen Resultate dieses Abschnitts, der Vollständigkeit von Bochnerräumen.

Satz 2.5 (Vollständigkeit von Bochnerräumen)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Dann sind die Bochnerräume $L^p(I, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, Banachräume.

Beweis. Wir unterscheiden die Fälle $1 \leq p < \infty$ und $p = \infty$. In beiden Fällen definiert $\|\cdot\|_{L^p(I,X)}$ eine Norm, sodass nur die Vollständigkeit zu zeigen bleibt.

1. Fall: $1 \leq p < \infty$.
Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(I, X)$ eine Cauchyfolge, das heißt es gelte
$$\lim_{n,k\to\infty} \|u_n - u_k\|_{L^p(I,X)} = 0.$$
Wir finden daher eine wachsende Folge $(k_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ mit
$$\left\|u_n - u_{k_j}\right\|^p_{L^p(I,X)} < 4^{-j} \text{ für alle } n \geq k_j. \tag{2.6}$$
Für die Teilfolge $(v_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v_j := u_{k_j}$, gilt wegen $k_{j+1} \geq k_j$ und (2.6)
$$\|v_{j+1} - v_j\|^p_{L^p(I,X)} = \int_I \|v_{j+1}(t) - v_j(t)\|^p_X \, \mathrm{d}t < 4^{-j}. \tag{2.7}$$

Für die Lebesgue-messbaren Mengen

$$M_j := \left\{ t \in I \,\middle|\, \|v_{j+1}(t) - v_j(t)\|_X^p \geq 2^{-j} \right\} \text{ und } N_i := \bigcup_{j \geq i} M_j$$

folgt aus (2.7)

$$\lambda(M_j) = \int_I \chi_{M_j}(t)\,\mathrm{d}t \leq 2^j \int_I \|v_{j+1}(t) - v_j(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t \leq 2j \cdot 4^{-j} = 2^{-j}.$$

Daraus ergibt sich

$$\lambda(N_i) \leq \sum_{j \geq i} \lambda(M_j) \leq \sum_{j \geq i} 2^{-j} = 2^{1-i}.$$

Für $N := \bigcap_{i \geq 1} N_i$ gilt wegen $N_1 \supset N_2 \supset ...$ und den Eigenschaften des Lebesguemaßes

$$\lambda(N) \leq \limsup_{i \to \infty} \lambda(N_i) = \lim_{i \to \infty} 2^{1-i} = 0.$$

Für $t \in I \setminus N$ existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $t \notin N_i$, was $t \notin M_j$ für alle $j \geq i$ nach sich zieht. Dann gilt aber

$$\|v_{j+1}(t) - v_j(t)\|_X^p < 2^{-j} \text{ für alle } j \geq i.$$

Damit folgt für alle $t \in I \setminus N$

$$\lim_{j \to \infty} \|v_{j+1}(t) - v_j(t)\|_X^p = 0.$$

Das bedeutet, dass die Folge $(v_j(t))_{j \in \mathbb{N}}$ für alle $t \in I \setminus N$ eine Cauchyfolge im Banachraum X ist. Daher existiert für alle $t \in I \setminus N$ ein Element $u(t) \in X$ für das gilt

$$\lim_{j \to \infty} \|v_j(t) - u(t)\|_X = 0.$$

Setzen wir noch $u(t) := 0$ für $t \in N$, so haben wir nun einen möglichen Kandidaten $u : I \to X$ für den Grenzwert der Cauchyfolge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gefunden.
Als Teilfolge der Bochner-messbaren Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist die Folge $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ebenfalls Bochner-messbar. Die Funktion u ist somit als fast-überall-Grenzwert der Folge $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ Bochner-messbar. Mit dem Lemma von Fatou angewandt auf die Folge Lebesgue-messbarer Funktionen $\|v_j(\cdot) - v_i(\cdot)\|_X$ gilt

$$\|v_j - u\|_{L^p(I,X)}^p \leq \liminf_{i \to \infty} \|v_j - v_i\|_{L^p(I,X)}^p$$

und wegen $(v_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folglich

$$\lim_{j \to \infty} \|v_j - u\|_{L^p(I,X)} = 0.$$

Wegen

$$\|u\|_{L^p(I,X)} \leq \|u - v_j\|_{L^p(I,X)} + \|v_j\|_{L^p(I,X)} < \infty$$

gilt $u \in L^p(I,X)$. Abschließend erhalten wir wegen der für alle $j \in \mathbb{N}$ gültigen Ungleichung

$$\|u_n - u\|_{L^p(I,X)} \leq \|u_n - v_j\|_{L^p(I,X)} + \|v_j - u\|_{L^p(I,X)}$$

die gewünschte Konvergenz $u_n \to u$ in $L^p(I,X)$.

2. Fall: $p = \infty$.
Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(I,X)$ eine Cauchyfolge, das heißt es gelte

$$\lim_{n,k\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{t\in I} \|u_n(t) - u_k(t)\|_X = 0.$$

Für alle $i \in \mathbb{N}$ existiert daher ein $n(i)$, sodass für alle $n,k \geq n(i)$ gilt

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in I} \|u_n(t) - u_k(t)\|_X < \frac{1}{i}.$$

Nach Definition des essentiellen Supremums gilt also

$$\|u_n(t) - u_k(t)\|_X < \frac{1}{i}$$

für alle $t \in I \setminus N^i_{n,k}$ mit einer von n,k und i abhängigen Nullmengen $N^i_{n,k}$ und für alle $n,k \geq n(i)$. Mit

$$N := \bigcup_{\substack{i\geq 1\\ n,k\geq n(i)}} N^i_{n,k}$$

gilt $\lambda(N) = 0$ und

$$\|u_n(t) - u_k(t)\|_X < \frac{1}{i}$$

für alle $t \in I \setminus N$ und $n,k \geq n(i)$.
Damit ist $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $t \in I \setminus N$ eine Cauchyfolge im Banachraum X. Daher existiert für alle $t \in I \setminus N$ ein Element $u(t) \in X$, für das gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(t) - u(t)\|_X = 0.$$

Setzen wir noch $u(t) := 0$ für $t \in N$, so haben wir wieder einen möglichen Kandidaten $u : I \to X$ für den Grenzwert der Cauchyfolge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gefunden. Wie im 1. Fall folgt, dass u Bochner-messbar ist und dass

$$\|u\|_{L^\infty(I,X)} < \infty$$

aufgrund der Dreiecksungleichung gilt. Da für $t \in I \setminus N$ und $n \geq n(i)$ die Abschätzung

$$\|u_n(t) - u(t)\|_X \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_n(t) - u_k(t)\|_X < \frac{1}{i}$$

gilt, folgt sofort

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^\infty(I,X)} = 0.$$

□

2.3 Dichte Teilmengen und Separabilität

Satz 2.8 (Dichtheit von Treppenfunktionen)
Für $1 \leq p < \infty$ liegt die Menge der Treppenfunktionen $\mathcal{S}(I,X)$ dicht in $L^p(I,X)$.

Beweis. Für $p = 1$ haben wir die Behauptung bereits in Satz 1.12 gezeigt. Der Beweis für $1 < p < \infty$ verläuft völlig analog. □

Korollar 2.9
Sei $1 \leq p < \infty$, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall und $D \subset X$ eine dichte Teilmenge eines Banachraums X. Dann ist die Menge

$$M := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \phi_i \, d_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, \phi_i \in C_0^\infty(I), d_i \in D \text{ für } i = 1, ..., n \right\} \subset L^p(I,X)$$

dicht in $L^p(I,X)$.

Beweis. Zunächst zeigen wir: Jede stetige Funktion $\phi : I \to X$ ist Bochner-messbar.
Sei dazu $K \subset I$ kompakt. (Es reicht, diesen Fall zu betrachten, denn für $I \subset \mathbb{R}$ gibt es kompakte Mengen K_k mit $I \subset \bigcup_{k\geq 1} K_k$.) Dann existieren zu jedem $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossene (und damit insbesondere Lebesgue-messbare) Mengen $K_1^n, ..., K_{l_n}^n$ mit $\mathrm{diam}(K_i^n) < \frac{1}{n}$ für $i = 1, ..., l_n$ und

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{l_n} K_i^n.$$

Wählt man $t_i \in K_i^n$ für $i = 1, ..., l_n$, so konvergieren die Treppenfunktionen

$$s_n(t) := \sum_{i=1}^{l_n} \phi(t_i) \chi_{K_i^n}$$

gleichmäßig gegen ϕ und ϕ ist daher Bochner-messbar. Insbesondere ist somit jede Funktion in M Bochner-messbar.
Wegen Satz 2.8 reicht es, Funktionen der Form $u = x\,\chi_B$ mit $x \in X$ und Lebesgue-messbarer Menge $B \subset I$ durch Funktionen aus M in $L^p(I, X)$ zu approximieren. Durch Faltung finden wir aber eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(I)$ mit

$$\phi_n \to \chi_B \text{ in } L^p(I).$$

Zu $x \in X$ existiert eine Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit

$$d_n \to x \text{ in } X.$$

Daher gilt

$$\|x\chi_B - \phi_n d_n\|_{L^p(I,X)} \leq \|x - d_n\|_X \, \|\chi_B\|_{L^p(I,X)} + \|d_n\|_X \, \|\chi_B - \phi_n\|_{L^p(I)} \to 0$$

für $n \to \infty$. □

Das letzte Korollar zeigt insbesondere

Korollar 2.10
Sei $1 \leq p < \infty$, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall und $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Dann gilt für $1 \leq p \leq \infty$

$$C_0^\infty(I, X) \hookrightarrow L^p(I, X).$$

Im Fall $p < \infty$ ist die Einbettung dicht.

Korollar 2.11 (Separabilität von $L^p(I, X)$)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall und $(X, \|\cdot\|_X)$ ein separabler Banachraum. Dann ist $L^p(I, X)$, $1 \leq p < \infty$ ebenfalls separabel.

Beweis. Es reicht, eine abzählbare Menge anzugeben, die dicht in der in Korollar 2.9 definierten Mengen M liegt. Sei dazu $D \subset X$ abzählbar und dicht in X und $\phi = \sum_{i=1}^{l} \phi_i d_i \in M$ beliebig. Sei außerdem

$$K_n := \overline{B_n(0)} \cap \{t \in I \mid \operatorname{dist}(t, \mathbb{R} \setminus I) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Dann ist K_n kompakt und für hinreichend großes n gilt

$$\bigcup_{i=1}^{l} \operatorname{supp}(\phi_i) \subset K_n.$$

Nach dem Weierstraß'schen Approximationssatz gibt es für alle ϕ_i, $i = 1, ..., l$, eine Folge von reellen Polynomen $(\tilde{P}_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$, die auf K_n gleichmäßig gegen ϕ_i konvergiert. Außerdem existiert zu jedem $\tilde{P}_k^i$ ein reelles Polynom P_k^i mit rationalen Koeffizienten sodass gilt

$$\max_{t\in K_n} |P_k^i(t) - \tilde{P}_k^i(t)| \leq \frac{1}{k}.$$

Die Menge

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{r} P^i_{|K^n} d_i \,\middle|\, r \in \mathbb{N}, P^i \text{ Polynom mit rationalen Koeffizienten}, d_i \in D \text{ für } i = 1, ..., r \right\}$$

ist dann offensichtlich abzählbar und liegt dicht in M. □

2.4 Die Sätze von Vitali und Lebesgue

Nachdem die Fragen nach dichten Teilmengen und der Separabilität nun geklärt sind, kommen wir zu zwei weiteren klassischen Sätzen der allgemeinen Integrationstheorie. Zum einen formulieren wir den Satz von Vitali, der gleichgradige Integrierbarkeit und starke Konvergenz miteinander verknüpft und insbesondere in der Wahrscheinlichkeitstheorie (Martingalkonvergenz-Sätze ...) Anwendung findet. Zum anderen folgern wir aus dem Satz von Vitali den (allgemeinen) Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz, der ein nützliches Kriterium zur Vertauschbarkeit von (Bochner-)Integration und Grenzwertbildung liefert.
Zunächst aber wollen wir klären, was unter p-gleichgradiger Integrierbarkeit zu verstehen ist.

Definition 2.12 (p-gleichgradige Integrierbarkeit)
Sei $1 \leq p < \infty$. Eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(I, X)$ heißt ***p-gleichgradig integrierbar****, falls gilt:*

1. *Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Lebesgue-messbare Menge $K \subset I$ mit $\lambda(K) < \infty$, so dass gilt*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{K^C} \|u_n(t)\|_X^p \, \mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$

2. *Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle Teilmengen $A \subset I$ mit $\lambda(A) \leq \delta$ gilt*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A \|u_n(t)\|_X^p \, \mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$

Bemerkung 2.13

Ist Λ eine endliche Indexmenge, so ist die Familie $(u_n)_{n\in\Lambda} \subset L^p(I,X)$ p-gleichgradig integrierbar.

Der Satz von Vitali lautet nun

Satz 2.14 (Vitali)

Sei $1 \leq p < \infty$ und für $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(I,X)$ gelte für fast alle $t \in I$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$$

Dann gilt: Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stark gegen u in $L^p(I,X)$ genau dann, wenn die Familie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ p-gleichgradig integrierbar ist.

Beweis. Der Beweis des Satzes verläuft völlig analog zum Beweis im Lebesgue'schen Fall. Wir verweisen daher auf [Els09]. □

Eine sehr nützliche Folgerung aus dem Satz von Vitali ist das folgende Kompaktheitsresultat.

Korollar 2.15 (L^p-L^q Kompaktheit)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und sei $1 \leq p < \infty$. Für die beschränkte Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(I,X)$ gelte

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$$

für fast alle $t \in I$. Dann gilt für alle $q < p$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \ \text{in} \ L^q(I,X).$$

Beweis. Übung □

Die nächste Folgerung aus dem Satz von Vitali ist als (allgemeiner) Konvergenzsatz von Lebesgue bekannt.

Satz 2.16 (allgemeiner Satz von Lebesgue)
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ *und* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *Banachräume und es gelte* $1 < q < \infty, 1 \leq p < \infty$. *Sei* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^q(I, Y)$ *eine Folge mit*

$$\lim_{n\to\infty} h_n = h \text{ in } L^q(I, Y).$$

Seien $u, u_n : I \to X$ *Bochner-messbar für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und es gelte für fast alle* $t \in I$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t).$$

Außerdem gelte für alle $n \in \mathbb{N}$ *und für fast alle* $t \in I$

$$\|u_n(t)\|_X^p \leq \|h_n(t)\|_Y^q .$$

Dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ in } L^p(I, X).$$

Beweis. Wegen Satz 1.12 gilt $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(I, X)$. Nach Voraussetzung gilt für alle $A \subset I$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_A \|u_n(t)\|_X^p \, \mathrm{d}t \leq \int_A \|h_n(t)\|_Y^q \, \mathrm{d}t.$$

Daraus können wir die p-gleichgradige Integrierbarkeit von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(I, X)$ folgern, da $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark in $L^q(I, Y)$ gegen h konvergiert. Der Satz von Vitali liefert daher die starke Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ in } L^p(I, X).$$

□

Ohne Beweis wollen wir außerdem folgende Umkehrung des Satzes über majorisierte Konvergenz zitieren.

Satz 2.17 (Umkehrung Lebesgue)
Sei $1 \leq p < \infty$ *und* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiere stark gegen* u *in* $L^p(I, X)$. *Dann existiert eine Teilfolge* $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *und ein* $h \in L^p(I)$ *mit*

1. $\lim_{k\to\infty} u_{n_k}(t) = u(t)$ *für fast alle* $t \in I$,
2. $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_{n_k}(t)\|_X \leq h(t)$ *für fast alle* $t \in I$.

Der Satz von Egorov liefert außerdem die fast gleichmäßige Konvergenz von $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *gegen* u.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit zwei Sätzen über Parameterintegrale.

Satz 2.18 (Stetigkeit unter dem Integral)
Sei Λ ein metrischer Raum und sei V eine offene Umgebung des Punktes $\lambda_0 \in \Lambda$. Die Funktion $u : V \times I \to X$ erfülle folgende Carathéodory- und Wachstumsbedingungen:

1. *$u(\cdot, t)$ sei stetig in λ_0 für fast alle $t \in I$.*
2. *$u(\lambda, \cdot)$ sei Bochner-messbar für alle $\lambda \in V$.*
3. *Es existiere eine Funktion $h \in L^1(I)$, sodass $\|u(\lambda, t)\|_X \leq h(t)$ für alle $\lambda \in V$ und für fast alle $t \in I$ gilt.*

Dann ist die Funktion $u(\lambda, \cdot)$ Bochner-integrierbar für alle $\lambda \in V$ und die Funktion

$$U(\lambda) := \int_I u(\lambda, t) \, \mathrm{d}t$$

ist stetig in λ_0.

Satz 2.19 (Vertauschbarkeit von Integral und Ableitung)
Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Die Funktion $u : J \times I \to X$ erfülle folgende Eigenschaften:

1. *$u(\cdot, t)$ sei differenzierbar auf J für fast alle $t \in I$.*
2. *$u(s, \cdot)$ sei Bochner-messbar für alle $s \in J$.*
3. *Es existiere eine Funktion $h \in L^1(I)$, sodass $\left\|\frac{\partial u}{\partial s}(s, t)\right\|_X \leq h(t)$ für alle $s \in J$ und für fast alle $t \in I$ gilt.*
4. *Es existiere ein $s_0 \in J$ mit $u(s_0, \cdot) \in L^1(I, X)$.*

Dann ist die Funktion $u(s, \cdot)$ Bochner-integrierbar für alle $s \in J$ und die Funktion

$$U(s) := \int_I u(s, t) \, \mathrm{d}t$$

ist differenzierbar auf J mit

$$\frac{\partial U}{\partial s}(s) = \int_I \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) \, \mathrm{d}t.$$

3 Dualräume und Reflexivität

3.1 Bemerkungen zur schwachen Kompaktheit

Das Ziel dieses Kapitels sind die Charakterisierung des Dualraums $L^p(I,X)^*$ sowie der Nachweis der Reflexivität von Bochnerräumen unter geeigneten Annahmen an p und den Banachraum X.
Wir wollen zunächst unser Interesse an der Reflexivität genauer begründen und dazu grundlegende Ergebnisse aus der Funktionalanalysis wiederholen.
In endlichdimensionalen Vektorräumen liefert der Satz von **Heine-Borel** ein Kriterium für die **(Folgen-)Kompaktheit** einer Menge M: Die Menge M ist (folgen)kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Dass man mit dieser Charakterisierung von Kompaktheit jedoch in unendlichdimensionalen Räumen an Grenzen stößt zeigt das **Lemma von Riesz:** Die abgeschlossene Einheitskugel eines Banachraums X ist (folgen)kompakt genau dann, wenn der Raum X endlichdimensional ist. Da kompakte Mengen notwendigerweise beschränkt sein müssen, kann man im unendlichdimensionalen Fall nur versuchen, die Abgeschlossenheitsanforderung der Mengen abzuschwächen. Der erste Schritt besteht dabei darin, von der durch die Norm induzierten Topologie zu einer schwächeren Topologie überzugehen. Die **schwache Topologie** ist (in unendlichdimensionalen Räumen strikt) gröber als die Norm-Topologie, was die „Chancen“ auf Kompaktheit erhöht. Die Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach zeigt, dass der Dualraum eines Banachraums reichhaltig genug ist und die schwache Topologie daher eine naheliegende und legitime Alternative zur Norm-Topologie darstellt. Dass der Übergang zu schwächeren Topologien zumindest das Problem der Charakterisierung schwach-kompakter Mengen schlussendlich löst, zeigen dann die „harten“ Sätze der Funktionalanalysis, die wir im weiteren zitieren werden. Für die Beweise sei auf [Bré11] verwiesen.
Zunächst gilt der fundamentale

Satz 3.1 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)
Sei X ein Banachraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel im Dularaum X^*,

$$B_{X^*} := \{\, f \in X^* \,\big|\, \|f\|_{X^*} \leq 1 \},$$

kompakt bezüglich der $*$-schwachen Topologie *$\omega(X^*, X)$.*

Obwohl dieser Satz formal das Analogon des Satzes von Heine-Borel ist, sei darauf hingewiesen, dass die Kompaktheit im Satz von Banach-Alaoglu-Bourbaki im Sinne von

Überdeckungskompaktheit zu verstehen ist, der Satz von Heine-Borel jedoch die für Anwendungen wesentlich nützlichere Folgenkompaktheit einer Menge klärt. In einem metrischen Raum sind die Begriffe der Folgen- und Überdeckungskompaktheit äquivalent. Der folgende Satz erlaubt uns daher die Folgenkompaktheit der Einheitskugel B_{X^*} zurückzugewinnen.

Satz 3.2 (Metrisierbarkeit der $*$-schwachen Topologie)

Sei X ein Banachraum. Dann gilt: Die Einheitskugel B_{X^*} ist genau dann metrisierbar bezüglich der $*$-schwachen Topologie, wenn der Banachraum X separabel ist.

Die Frage nach der Separabilität von Bochnerräumen $L^p(I, X)$ haben wir bereits im vorherigen Kapitel beantwortet. Wir wollen daher schon einmal den nächsten Satz festhalten.

Satz 3.3 ($*$-schwache Folgenkompaktheit)

Sei X ein separabler Banachraum und sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel im Dualraum $L^p(I, X)^*$,

$$B_{(L^p(I,X))^*} := \left\{ f \in (L^p(I, X))^* \mid \|f\|_{(L^p(I,X))^*} \leq 1 \right\},$$

***$*$-schwach folgenkompakt.** Insbesondere gilt: Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (L^p(I, X))^*$ beschränkt, so existiert $f \in (L^p(I, X))^*$ und eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für $k \to \infty$ gilt*

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ in } (L^p(I, X))^*.$$

Offensichtlich gilt aber auch, dass dieser Satz ziemlich blutleer ist, solange wir keine **Charakterisierung der Dualräume** $(L^p(I, X))^*$ haben!
Darüberhinaus wollen wir natürlich eine anwendungsfreundliche Charakterisierung kompakter Mengen im Raum X selbst, um nicht immer klären zu müssen, ob ein Banachraum Y exisitiert mit $X = Y^*$. Um diesem Ziel näher zu kommen, sei an dieser Stelle noch einmal an den Begriff der Reflexivität erinnert: Ein Banachraum X heißt **reflexiv** genau dann, wenn die kanonische Isometrie

$$\begin{aligned} J_X &: X \to X^{**} \\ \langle J_X x, f\rangle_{X^*} &:= \langle f, x\rangle_X \end{aligned}$$

surjektiv ist. Es gilt dann der fundamentale

Satz 3.4 (Kakutani)

Sei X ein Banachraum. Dann ist X reflexiv genau dann, wenn die abgeschlossene Einheitskugel in X,

$$B_X := \left\{ x \in X \mid \|x\|_X \leq 1 \right\},$$

***kompakt bezüglich der schwachen Topologie** $\omega(X, X^*)$ ist.*

Auch im Satz von Kakutani ist Überdeckungskompaktheit gemeint, was wiederum nicht der Kompaktheitsbegriff ist, den wir uns für Anwendungen wünschen. Dieser scheinbare Wermutstropfen wird schlussendlich vom Satz von Eberlein-Šmuljan beseitigt:

Satz 3.5 (Eberlein-Šmuljan)
*Ist X ein **reflexiver Banachraum**, so sind **beschränkte Mengen** in X **schwach folgenkompakt.** Umgekehrt gilt: Enthält in einem Banachraum X jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine schwach konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so ist X reflexiv.*

Dieser Satz liefert die Rechtfertigung dafür, uns mit der Reflexivität von Bochnerräumen zu befassen.

3.2 Charakterisierung der Dualräume

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $1 \leq p < \infty$ so wissen wir, dass wir den Dualraum von $L^p(\Omega)$ mit dem Raum $L^{p'}(\Omega)$ identifizieren können, wobei $p' = \frac{p}{p-1}$ den zu p dualen Exponenten bezeichnet. Genauer gilt: Die Abbildung

$$\begin{aligned} T : L^{p'}(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*,\ g \mapsto T_g, \\ \langle T_g, f\rangle_{L^p(\Omega)} := \int_\Omega g(x)f(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.
Ein analoges Ergebnis wollen wir für Bochnerräume beweisen. Die erste Idee dabei ist, das Produkt $g(x)f(x)$ durch die duale Paarung in zwischen X^* und X zu ersetzen. Außerdem wissen wir bereits aus Folgerung 1.22, dass für $f \in L^{p'}(I, X^*)$ und $u \in L^p(I, X)$ mit $1 \leq p < \infty$, die reelle Funktion

$$t \mapsto \langle f(t), u(t)\rangle_X$$

Lebesgue-messbar ist. Dank der Hölder-Ungleichung gilt sogar

Korollar 3.6
Für $1 \leq p < \infty$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} T : L^{p'}(I, X^*) \to (L^p(I, X))^*,\ f \mapsto T_f, \\ \langle T_f, v\rangle_{L^p(I,X)} := \int_I \langle f(t), v(t)\rangle_X\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3.7}$$

linear und stetig und es gilt

$$\|T_f\|_{(L^p(I,X))^*} \leq \|f\|_{L^{p'}(I,X^*)}\,.$$

Die Tatsache, dass T eine surjektive Isometrie (und damit auch injektiv) ist, ist technisch aufwendig. Ein wichtiger Schritt im Beweis ist die Existenz einer Funktion $u \in L^p(I,X)$, so dass für eine gegebene Funktion $f \in L^{p'}(I,X^*)$ punktweise

$$\langle f(t), u(t)\rangle_X = \|f(t)\|_{X^*}$$

gilt. Ist X reflexiv, so ist für festes t ist die Existenz eines Elements $u(t) \in X$ mit der obigen Eigenschaft eine Konsequenz des Satzes von Hahn-Banach, siehe dazu Satz 1.15. Auch im reflexiven Fall muss dieses Element allerdings nicht eindeutig sein. Zunächst befassen wir uns daher mit der Konstruktion einer Bochner-messbaren Auswahlfunktion der a priori mengenwertigen Abbildung

$$t \mapsto \left\{\, u(t) \in B_X \;\middle|\; \langle f(t), u(t)\rangle_X = \|f(t)\|_{X^*} \,\right\}. \tag{3.8}$$

Theorem 3.9 (Existenz einer Bochner-messbaren Auswahlfunktion)

*Sei X ein endlichdimensionaler Vektorraum und $f : I \to X^*$ Bochner-messbar. Dann existiert eine **Bochner-messbare Auswahlfunktion** $u : I \to X$ der mengenwertigen Abbildung (3.8), das heißt, es existiert eine Bochner-messbare Funktion $u : I \to X$, so dass für alle $t \in I$*

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_X &= 1 \textit{ und} \\ \langle f(t), u(t)\rangle_X &= \|f(t)\|_{X^*}\,. \end{aligned}$$

gilt.

Beweis. Für $t \in I$ definieren wir

$$A(t) := \left\{\, x \in X \;\middle|\; \|x\|_X = 1 \text{ und } \langle f(t), x\rangle_X = \|f(t)\|_{X^*} \,\right\}.$$

Da endlichdimensionale Räume reflexiv sind, folgt mit Hilfe der Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach, dass $A(t)$ nichtleer ist.

Sei nun $n = \dim X$ und $u = (u_1, ..., u_n)$, so dass es reicht, für die gesuchte Funktion $u : I \to X$ Koordinatenfunktionen $u_1, ..., u_n$ anzugeben. Da X endlichdimensional ist, ist

$$B_X := \left\{\, x \in X \;\middle|\; \|x\|_X = 1 \,\right\}$$

kompakt. Außerdem ist für jedes $t \in I$ die Funktion

$$x = (x_1, ..., x_n) \mapsto \langle f(t), x\rangle_X$$

stetig. Wir erhalten daher wohldefinierte Koordinatenfunktionen $u_1, ..., u_n$ durch

$$\begin{aligned} u_1(t) &:= \min \left\{\, x_1 \;\middle|\; \|x\|_X = 1 \text{ und } \langle f(t), x\rangle_X = \|f(t)\|_{X^*} \,\right\}, \\ u_2(t) &:= \min \left\{\, x_2 \;\middle|\; \|x\|_X = 1 \text{ und } \langle f(t), x\rangle_X = \|f(t)\|_{X^*} \right. \\ &\qquad\qquad \left. \text{und } x_1 = u_1(t) \,\right\}, \\ &\;\;\vdots \\ u_n(t) &:= \min \left\{\, x_n \;\middle|\; \|x\|_X = 1 \text{ und } \langle f(t), x\rangle_X = \|f(t)\|_{X^*} \right. \\ &\qquad\qquad \left. \text{und } x_i = u_i(t) \text{ für alle } i < n \,\right\}. \end{aligned}$$

Für jedes $t \in I$ haben wir nun ein $u(t) \in X$ gefunden, so dass gilt:

$$\|u(t)\|_X = 1 \text{ und } \langle f(t), u(t)\rangle_X = \|f(t)\|_{X^*}$$

Es bleibt noch die Bochner-Messbarkeit von u zu zeigen.
Dazu seien $H : I \times X \to \mathbb{R}^l$ und $G : I \times X \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar bezüglich $t \in I$ und stetig bezüglich $x \in X$. Dann ist die Menge

$$\mathcal{S} := \left\{ t \in I \,\middle|\, \exists x \in X \text{ mit } \|x\|_X = 1, |H(t,x)| = 0, G(t,x) \leq 0 \right\}$$

messbar. Zum Beweis dieser Behauptung sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare, dichte Teilmenge der Einheitssphäre $\partial B_X = \{x \in X \mid \|x\|_X = 1\}$. (Die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ existiert, da X endlich-dimensional ist.) Dann gilt

$$\mathcal{S} = \bigcap_{j\geq 1} \bigcup_{i\geq 1} \left\{ t \in I \,\middle|\, |H(t,x_i)| < \frac{1}{j} \text{ und } G(t,x_i) < \frac{1}{j} \right\},$$

denn zunächst gilt für $t \in \mathcal{S}$: Es existiert $x \in X$ mit $\|x\|_X = 1$, $|H(t,x)| = 0$ und $G(t,x) \leq 0$. Die Funktionen $H(t,\cdot)$ und $G(t,\cdot)$ sind aber stetig, sodass für alle $j \geq 1$ ein x_i existiert mit $|H(t,x_i)| < \frac{1}{j}$ und $G(t,x_i) < \frac{1}{j}$.
Umgekehrt gilt für $t \in I$, so dass für alle $j \geq 1$ ein $i_j \geq 1$ mit $|H(t,x_{i_j})| < \frac{1}{j}$ und $G(t,x_{i_j}) < \frac{1}{j}$ existiert bereits $t \in \mathcal{S}$, denn: Für alle i_j ist $x_{i_j} \in \partial B_X$ und da die Sphäre ∂B_X kompakt ist, finden wir eine konvergente Teilfoge $(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{i_k} \to x \in \partial B_x$ für $k \to \infty$ und

$$\begin{aligned} |H(t,x)| &= \lim_{k\to\infty} |H(t,x_{i_k})| = 0, \\ G(t,x) &= \lim_{k\to\infty} G(t,x_{i_k}) \leq 0. \end{aligned}$$

Damit können wir nun die Messbarkeit der Koordinatenfunktionen $u_1, ...u_n$ zeigen. Sei dazu für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} H(t,x) &:= \langle f(t), x\rangle_X - \|f(t)\|_{X^*}, \\ G_i(t,x) &:= x_i - \alpha. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$u_1^{-1}((-\infty,\alpha]) = \left\{ t \in I \,\middle|\, \exists x \in X \text{ mit } \|x\|_X = 1,\, |H(t,x)| = 0,\, G_1(t,x) \leq 0 \right\}$$

und wegen der Zwischenbehauptung ist u_1 somit messbar[1]. Seien $u_1, ..., u_k$ schon messbar und

$$\tilde{H}(t,x) := (H(t,x), x_1 - u_1(t), ..., x_k - u_k(t))\,.$$

[1] Man beachte, dass die Lebesgue-Messbarkeit der Funktion H aus der Bochner-Messbarkeit der Funktion f folgt.

Dann gilt

$$u_{k+1}^{-1}((-\infty,\alpha]) = \left\{ t \in I \,\middle|\, \exists x \in X \text{ mit } \|x\|_X = 1,\, |\tilde{H}(t,x)| = 0,\, G_{k+1}(t,x) \leq 0 \right\}$$

und wegen der Zwischenbehauptung ist dann auch u_{k+1} messbar. Damit sind alle Koordinatenfunktionen Lebesgue-messbar. Wir definieren nun Funktionale $f_i \in X^*$, $i = 1, ..., n = \dim X^*$, durch $f_i(x) := x_i$, so dass $\{f_1, ...f_n\}$ eine Basis von X^* ist. Insbesondere sind dann die reellwertigen Abbildungen

$$t \mapsto \langle f_i, u(t)\rangle_X,\ i = 1, ...n,$$

messbar und wegen der Basiseigenschaft der f_i ist u somit schwach messbar. Da endlichdimensionale Banachräume separabel sind, liefert der Satz von Pettis schließlich die Bochner-Messbarkeit von $u : I \to X$. □

Wir können nun zeigen

Lemma 3.10 (Isometrischer Isomorphismus im Fall $\dim X < \infty$)
Sei X ein endlichdimensionaler Vektorraum und sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist die Abbildung

$$T : L^{p'}(I, X^*) \to (L^p(I, X))^*,\ f \mapsto T_f, \qquad (3.11)$$
$$\langle T_f, v\rangle_{L^p(I,X)} := \int_I \langle f(t), v(t)\rangle_X \,\mathrm{d}t$$

ein ***isometrischer Isomorphismus.***

Beweis. Wir zeigen zunächst die Isometrie von T. Sei dazu $f \in L^{p'}(I, X^*)$ und $u : I \to X$ Bochner-messbar mit

$$\|u(t)\|_X = 1 \text{ und } \langle f(t), u(t)\rangle_X = \|f(t)\|_{X^*}$$

für alle $t \in I$. Die Existenz dieser Funktion u haben wir gerade in Theorem 3.9 gezeigt. Aus der Definition der Abbildung T und der Hölder-Ungleichung folgt leicht die Abschätzung

$$\|T_f\|_{(L^p(I,X))^*} \leq \|f\|_{L^{p'}(I,X^*)} .$$

Für die umgekehrte Abschätzung betrachten wir zunächst den Fall $p = 1$ und $p' = \infty$. Nach Definition der L^∞-Norm existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Menge $A \subset I$ mit positivem Maß und

$$\|f(t)\|_{X^*} \geq \|f\|_{L^\infty(I,X^*)} - \varepsilon$$

für alle $t \in A$. Sei $\tilde{u} := u\chi_A$. Dann gilt $\tilde{u} \in L^1(I, X)$ mit $\|\tilde{u}\|_{L^1(I,X)} = \lambda(A)$ und

$$\langle T_f, \tilde{u}\rangle_{L^1(I,X)} = \int_A \langle f(t), u(t)\rangle_X \,\mathrm{d}t = \int_A \|f(t)\|_{X^*} \,\mathrm{d}t \geq \lambda(A) \left(\|f\|_{L^\infty(I,X^*)} - \varepsilon\right).$$

Daher gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\lambda(A)\left(\|f\|_{L^\infty(I,X^*)} - \varepsilon\right) &\leq \langle T_f, \tilde{u}\rangle_{L^1(I,X)} \\ &\leq \|T_f\|_{(L^1(I,X))^*} \|\tilde{u}\|_{L^1(I,X)} = \|T_f\|_{(L^1(I,X))^*} \lambda(A).\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt

$$\|f\|_{L^\infty(I,X^*)} \leq \|T_f\|_{(L^1(I,X))^*}.$$

Nun betrachten wir den Fall $1 < p < \infty$ und $p' < \infty$. Wir definieren dazu

$$\tilde{u}(t) := \|f(t)\|_{X^*}^{p'-1} u(t).$$

Man rechnet leicht nach, dass dann gilt:

1. $\tilde{u} : I \to X$ ist Bochner-messbar,
2. $\|\tilde{u}(t)\|_X^p = \|f(t)\|_{X^*}^{p'}$,
3. $\tilde{u} \in L^p(I, X)$,
4. $\|\tilde{u}\|_{L^p(I,X)} = \|f\|_{L^{p'}(I,X^*)}^{p'/p}$,
5. $\langle T_f, \tilde{u}\rangle_{L^p(I,X)} = \|f\|_{L^{p'}(I,X^*)}^{p'}$ und
6. $\|f\|_{L^{p'}(I,X^*)} \leq \|T_f\|_{(L^p(I,X))^*}$.

Insbesondere ist T somit auch im Fall $p < \infty$ eine Isometrie. Da die Isometrie die Injektivität von T impliziert, bleibt nur noch die Surjektivität von T zu zeigen. Sei dazu $(x_1, ..., x_n)$ eine Basis von X, $F \in (L^p(I, X))^*$ und $u = u_1x_1 + ... + u_nx_n \in L^p(I, X)$. Definiere $H_i \in (L^p(I))^*$ durch

$$H_i(v) := F(vx_i)$$

für $v \in L^p(I)$ und $i = 1, ..., n$. Dann gilt

$$F(u) = \sum_{i=1}^{n} F(u_ix_i) = \sum_{i=1}^{n} H_i(u_i).$$

Nun existiert aber für jedes $H_i \in (L^p(I))^*$ ein $f_i \in L^{p'}(I)$ mit

$$H_i(v) = \int_I f_i(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $v \in L^p(I)$. Daher gilt

$$F(u) = \sum_{i=1}^{n} F(u_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} H_i(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_I f_i(t) u_i(t)\,\mathrm{d}t.$$

Definieren wir nun $f : I \to X^*$ durch

$$\langle f(t), x \rangle_X := \sum_{i=1}^{n} f_i(t) a_i$$

für $x = \sum_i a_i x_i \in X$, so gilt $f \in L^{p'}(I, X^*)$ und $T_f = F$. □

Wie wir gesehen haben, beruht der Beweis von Lemma 3.10 wesentlich auf Theorem 3.9, das heißt, auf der Tatsache, dass X ein endlichdimensionaler Banachraum ist. Nun ist Separabilität eine Eigenschaft, die in vielerlei Hinsicht der Endlichdimensionalität am nächsten kommt: Ist X ein separabler Banachraum mit abzählbarer, dichter Teilmenge $D = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, so gilt mit $X_n := \operatorname{span}\{x_1, ..., x_n\}$

$$X = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n}, \ \dim X_n < \infty \text{ und } X_n \subset X_{n+1},$$

das heißt, man kann X quasi durch endlichdimensionale Räume X_n ausschöpfen.
Darüber hinaus gilt: Ist X ein Banachraum mit separablem Dualraum X^*, so ist X selbst separabel. Die Gültigkeit des nächsten Theorems sollte daher intuitiv klar sein und wir verzichten an dieser Stelle auf den Beweis.

Theorem 3.12 (Isometrischer Isomorphismus bei Separabilität)
Sei X ein Banachraum mit separablem Dualraum X^* und sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist die Abbildung T in (3.11) ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Übungsaufgabe □

Aufgrund der Äquivalenz

$$X \text{ reflexiv und separabel} \iff X^* \text{ reflexiv und separabel}$$

gilt

Theorem 3.13 (Isometrischer Isomorphismus)
Sei X ein Banachraum, so dass entweder X oder X^* reflexiv und separabel ist. Dann ist die Abbildung T in (3.11) ein isometrischer Isomorphismus. (Man kann sogar zeigen, dass die Aussage des Theorems schon dann gilt, wenn X reflexiv oder separabel ist.)

3.3 Reflexivität

Mit Hilfe von Theorem 3.12 können wir nun die anfangs gestellte Frage nach der Reflexivität von Bochnerräumen beantworten.

Theorem 3.14 (Reflexivität von $L^p(I, X)$)
Sei X ein reflexiver, separabler Banachraum. Dann sind die Bochnerräume $L^p(I, X)$, $1 < p < \infty$, reflexiv.

Beweis. Blatt 7, Aufgabe 1
Zu zeigen ist, dass die **kanonische Isometrie**

$$\begin{aligned} J : L^p(I, X) &\to (L^p(I, X))^{**} \\ \langle Ju, f \rangle_{(L^p(I,X))^*} &:= \langle f, u \rangle_{L^p(I,X)} \end{aligned}$$

surjektiv ist. Da X reflexiv ist, ist die kanonische Isometrie

$$j : X \to X^{**}$$

surjektiv und lässt sich zu einer surjektiven Isometrie

$$\begin{aligned} j : L^p(I, X) &\to L^p(I, X^{**}) \\ (ju)(t) &:= j(u(t)) \end{aligned}$$

fortsetzen. Diese letzte Behauptung (insbesondere die Bochner-Messbarkeit der Funktionen $j(u)$) folgt aus der Identität

$$\|u(t)\|_X = \|j(u(t))\|_{X^{**}} = \|(ju)(t)\|_{X^{**}} .$$

Nach Theorem 3.12 wissen wir, dass

$$T : L^{p'}(I, X^*) \to (L^p(I, X))^*$$

ein isometrischer Isomorphismus ist. Damit sind aber auch

$$T^{-1} : (L^p(I, X))^* \to L^{p'}(I, X^*)$$

und der zu T^{-1} adjungierte Operator

$$(T^{-1})^* : (L^{p'}(I, X^*))^* \to L^p(I, X)^{**}$$

isometrische Isomorphismen. Analog zu Theorem 3.12 kann man zeigen, dass auch

$$T' : L^{(p')'}(I, (X^*)^*) \to (L^{p'}(I, X^*))^*$$

ein isometrischer Isomorphismus ist mit $L^{(p')'}(I, X^{**}) \cong L^p(I, X)$.
Nun haben wir alle Hilfsmittel beisammen um zu zeigen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L^p(I,X) & \xrightarrow{\ J\ } & (L^p(I,X))^{**} \\ \big\downarrow{\scriptstyle j} & & \big\uparrow{\scriptstyle (T^{-1})^*} \\ L^p(I,X^{**}) & \xrightarrow[T']{} & (L^{p'}(I,X^*))^* \end{array}$$

kommutiert. Sei dazu $F \in (L^p(I,X))^*$ und $u \in L^p(I,X)$. Da T surjektiv ist, existiert $f \in L^{p'}(I,X^*)$ mit $F = T_f$ und es gilt

$$\begin{aligned} \langle Ju, F\rangle_{(L^p(I,X))^*} = \langle F, u\rangle_{L^p(I,X)} = \langle T_f, u\rangle_{L^p(I,X)} &= \int_I \langle f(t), u(t)\rangle_X \,\mathrm{d}t \\ &= \int_I \langle (ju)(t), f(t)\rangle_{X^*} \,\mathrm{d}t \\ &= \langle T'(ju), T^{-1}F\rangle_{L^{p'}(I,X^*)} \\ &= \left\langle \left((T^{-1})^* \circ T' \circ j\right) u, F\right\rangle_{(L^p(I,X))^*}. \end{aligned}$$

Damit ist $J = (T^{-1})^* \circ T' \circ j$ als Verkettung von Isomorphismen selbst ein Isomorphismus.
□

Als Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch kurz auf einen alternativen und überraschend geometrischen Zugang zur Reflexivität eingehen.
Ein Banachraum heißt **gleichmäßig konvex**, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x, y \in B_X$ folgende Implikation gilt:

$$\|x-y\|_X > \varepsilon \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_X < 1-\delta.$$

Nun gilt das folgende

Theorem 3.15 (Milman-Pettis: X gleichmäßig konvex $\Rightarrow$ X reflexiv)
Jeder gleichmäßig konvexe Banachraum ist reflexiv.

Beweis. s. [Bré11]. □

Mit Hilfe der sogenannten Clarkson-Ungleichung (s. [Bré11]) kann man auf die gleichmäßige Konvexität der Lebesgueräume $L^p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ schließen.
Der folgende Satz liefert nun einen alternativen Beweis für die Reflexivität der Bochnerräume.

Theorem 3.16 (Gleichmäßige Konvexität)
Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein gleichmäßig konvexer Banachraum. Dann sind die Bochnerräume $L^p(I,X)$, $1 < p < \infty$, gleichmäßig konvex.

Beweis. s. [GGZ74], S. 136/137 □

4 Vektorwertige Distributionen und verallgemeinerte Zeitableitung

In der Einführung haben wir (formal) begründet, warum die Bochnerräume geeignete Funktionenräume zur Behandlung parabolischer Differentialgleichungen, wie z. B. der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \quad \text{in } I \times \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{in } I \times \partial\Omega, \\ u(0) &= u_0 \ \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

darstellen. Schaut man sich die Begründung noch einmal an, so erkennt man, dass der elliptische Teil der Gleichung $-\Delta u$ die Wahl des Raums $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ bzw. des Bochnerraums $L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega))$ induziert. Mit der Identität $\partial_t u\, u = \frac{1}{2}\partial_t |u|^2$ lieferte der Term $\partial_t u\, u$ nach Integration schließlich den Raum $L^\infty(I, L^2(\Omega))$.
Wir haben aber noch nicht geklärt, in welchem Sinne die Zeitableitung zu verstehen ist. Dies wollen wir nun tun. Es bieten sich dazu zunächst zwei Sichtweisen an:

- Betrachten wir u als Funktion $u : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, so können wir $\partial_t u$ einfach als partielle Ableitung nach der Zeitvariablen auffassen.

- Identifizieren wir u allerdings mit der Banachraum-wertigen Funktion $\tilde{u} : I \to X$, $t \mapsto [\tilde{u}(t)]$, so sollten wir $\partial_t u$ ebenfalls mit der Ableitung dieser Funktion identifizieren.

Wir werden im Folgenden die zweiten Sichtweise bevorzugen und $u : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit der vektorwertigen Funktion $\tilde{u} : I \to X$ identifizieren. Daher müssen wir uns zunächst mit dem Begriff der Ableitung vektorwertiger Funktionen vertraut machen. Es zeigt sich dann, dass man diesen Ableitungsbegriff ausgehend vom Begriff der vektorwertigen Distributionen noch weiter verallgemeinern kann. Was zunächst technisch klingt, ist bei näherem Hinsehen der gleiche Zugang, der zur Definition der „schwachen“ Ableitung und schließlich zur Konstruktion der klassischen Sobolevräume genutzt wird.
Die Zeitableitung im Sinne vektorwertiger Distributionen und der daraus resultierende Begriff der verallgemeinerten Zeitableitung liefert uns dann verallgemeinerte Sobolevräume. Wie im Falle elliptischer Gleichungen bilden (verallgemeinerte) Sobolevräume die Grundlage für die schwache Formulierung zeitabhängiger Probleme und liefern den funktionalanalytischen Rahmen für die entsprechende Existenztheorie.

4.1 Differenzierbarkeit und vektorwertige Distributionen

Definition 4.1 (starke und schwache Ableitung X-wertiger Funktionen)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Eine Funktion $u : I \to X$ heißt

1. ***(stark) differenzierbar*** *in $t \in I$, falls ein Element $x \in X$ existiert mit*

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ t+h \in I}} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} = x \text{ in } X,$$

2. ***schwach differenzierbar*** *in $t \in I$, falls ein Element $x \in X$ existiert, so dass*

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ t+h \in I}} \left\langle f, \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\rangle_X = \langle f, x \rangle_X$$

   für alle $f \in X^*$ gilt. Wir definieren dann $u_t(t) := x$ und nennen $u_t(t)$ ***starke/schwache Ableitung*** *von u in t.*

Die Funktion u heißt ***strak/schwach differenzierbar*** *auf I, falls u in jedem $t \in I$ stark/schwach differenzierbar ist. Die Funktion $u_t : I \to X$ heißt dann* ***starke/schwache Ableitung*** *von u. Die Menge der stark differenzierbaren Funktionen $u : \bar{I} \to X$, deren Ableitung stetig auf $\bar{I}$ ist, bezeichnen wir mit $C^1(\bar{I}, X)$.*

Bemerkung 4.2

1. *Man sollte sich klar machen, dass eine differenzierbare Funktion $u : I \to X$ stets schwach differenzierbar ist und die schwache Ableitung dann mit der starken Ableitung übereinstimmt.*

2. *Da sich in endlichdimensionalen Banachräumen starke und schwache Topologie entsprechen, ist eine Funktion mit Werten in einem endlichdimensionalen Banachraum genau dann differenzierbar, wenn sie schwach differenzierbar ist.*

3. *Höhere Differenzierbarkeit definiert man induktiv: Eine Funktion $u : I \to X$ ist zweimal stark/schwach differenzierbar, falls $u_t : I \to X$ stark/schwach differenzierbar ist.*

Wie im reellen Fall gilt auch für vektorwertige differenzierbare Funktionen eine entsprechende Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Da der Beweis wie im reellen Fall funktioniert zitieren wir

Theorem 4.3 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Sei $u \in C^1(\bar{I}, X)$ und $t_1, t_2 \in \bar{I}$ mit $t_1 < t_2$ beliebig. Dann gilt

$$u(t_2) - u(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} u(t)\,\mathrm{d}t.$$

Sei nun $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Um die Ableitung im Sinne vektorwertiger Distributionen zu definieren, statten wir den Raum $C_0^\infty(I)$, der auf I unendlich oft differenzierbaren, reellen Funktionen mit kompakt in I enthaltenem Träger, mit einer geeigneten Topologie aus.

Lemma 4.4 ($\mathcal{D}(I)$)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Für jede kompakte Teilmenge $K \subset\subset I$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$ definieren wir auf $C_0^\infty(I)$ eine Halbnorm durch

$$\nu_{k,K}(\varphi) := \max_{\substack{0 \le l \le k \\ t \in K}} |\varphi^{(l)}(t)|,$$

wobei $\varphi^{(l)}$ die l-te Ableitung von φ bezeichnet.
Die Bezeichnung $\mathcal{D}(I)$ steht für den lokalkonvexen Raum, den man durch Topologisierung des Raumes $C_0^\infty(I)$ mittels der Familie

$$(\nu_{k,K})_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ K \subset\subset I}}$$

von Halbnormen erhält. Wir nennen $\mathcal{D}(I)$ den ***Raum der Testfunktionen auf*** *I. Man kann zeigen, dass diese Topologie zu dem folgenden Konvergenzbegriff in $\mathcal{D}(I)$ führt: Eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(I)$ konvergiert gegen $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, falls*

1. *eine kompakte Menge $K \subset\subset I$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren mit supp$(\varphi_n) \subset K$ für alle $n \ge n_0$ und*
2. $\lim_{n\to\infty} \max_{t \in K} |\varphi_n^{(l)}(t) - \varphi^{(l)}(t)| = 0$ *für alle $l \in \mathbb{N}$ gilt.*

Definition 4.5 (vektorwertige Distribution)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\mathcal{D}(I)$ der in Lemma 4.4 definierte Raum der Testfunktionen und $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Eine lineare, stetige Abbildung

$$T : \mathcal{D}(I) \to X$$

heißt ***vektorwertige Distribution*** *auf I. Den Raum der X-wertigen Distributionen auf I bezeichnen wir mit $\mathcal{D}'(I, X)$.*

Bemerkung 4.6

Für eine vektorwertige Distribution $T : \mathcal{D}(I) \to X$ gilt per Definition die folgende Implikation für jede Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(I)$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \text{ in } \mathcal{D}(I) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = T(\varphi) \text{ in } X.$$

Bemerkung 4.7

Man kann zeigen, dass genau dann $T \in \mathcal{D}'(I, X)$ gilt, wenn für alle kompakten Teilmengen $K \subset\subset I$ ein $k \in \mathbb{N}$ und ein $C_K \geq 0$ existieren, sodass für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$ gilt

$$\|T(\varphi)\|_X \leq C_K \nu_{k,K}(\varphi).$$

Bemerkung 4.8

Die gängige Literatur benutzt die Schreibweise

$$T(\varphi) =: \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(I,X),\mathcal{D}(I)}.$$

Falls die Notation aus dem Zusammenhang klar ist, verwenden wir auch

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'_X} = \langle T, \varphi\rangle.$$

Definition 4.9 (Konvergenz in $\mathcal{D}'(I, X)$)

*Eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(I, X)$ konvergiert gegen $T \in \mathcal{D}'(I, X)$ **im Sinne von Distributionen**, falls für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle \text{ in } X.$$

Beispiel 4.10

1. *Für festes $t \in I$ definiert*

$$\delta^t : \mathcal{D}(I) \to \mathbb{R}, \langle \delta^t, \varphi\rangle := \varphi(t)$$

   eine $\mathbb{R}$-wertige Distribution.

2. *Sei $u \in L^1_{loc}(I)$ eine gegebene Funktion. Dann definiert*

$$T_u : \mathcal{D}(I) \to \mathbb{R}, \langle T_u, \varphi\rangle := \int_I u(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

   eine $\mathbb{R}$-wertige Distribution.

4.2 Distributionelle Zeitableitung

Definition 4.11 (Zeitableitung im Sinne vektorwertiger Distributionen)
Die lineare Abbildung

$$\frac{d}{dt} : \mathcal{D}'(I,X) \to \mathcal{D}'(I,X),$$
$$\left\langle \frac{dT}{dt}, \varphi \right\rangle := -\langle T, \partial_t \varphi \rangle \,, \; \varphi \in \mathcal{D}(I),$$

heißt ***Zeitableitung im Sinne vektorwertiger Distributionen***[1]*. Höhere Ableitungen werden induktiv definiert.*

Bemerkung 4.12
Man mache sich klar, dass die Abbildung $\frac{d}{dt} : \mathcal{D}'(I,X) \to \mathcal{D}'(I,X)$ *wohldefiniert ist.*

Liegt eine Folge von differenzierbaren Funktionen vor, so stellt sich die Frage nach der Vertauschbarkeit von Grenzwert und Ableitung. Das folgende Korollar beantwortet diese Frage für den Fall von Distributionen.

Korollar 4.13 (Stetigkeit von $\frac{d}{dt}$)
Die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(I,X)$ *konvergiere gegen* $T \in \mathcal{D}'(I,X)$ *im Sinne von Distributionen. Dann konvergiert auch* $(\frac{dT_n}{dt})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(I,X)$ *gegen* $\frac{dT}{dt} \in \mathcal{D}'(I,X)$ *im Sinne von Distributionen.*

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ beliebig. Dann gilt

$$\left\langle \frac{dT_n}{dt}, \varphi \right\rangle = -\langle T_n, \partial_t \varphi \rangle \to -\langle T, \partial_t \varphi \rangle = \left\langle \frac{dT}{dt}, \varphi \right\rangle,$$

wegen $\partial_t \varphi \in \mathcal{D}(I)$. □

Die folgende Proposition zeigt, dass das Verschwinden der distributionellen Ableitung (wie im klassischen Fall) die Konstanz der betrachteten Distribution zur Folge hat.

Proposition 4.14 ($\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow T = \text{const}$)
Für $T \in \mathcal{D}'(I,X)$ *gelte* $\frac{dT}{dt} = 0$*. Dann existiert ein Element* $x \in X$*, sodass für alle* $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ *gilt*

$$\langle T, \varphi \rangle = \left(\int_I \varphi(t) \, \mathrm{d}t \right) x.$$

[1] Für $\varphi : I \to \mathbb{R}$ benutzen wir die Schreibweise $\partial_t \varphi := \varphi'$ aus Ermangelung an Alternativen ;-)

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ mit $\int_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$ beliebig. Für $I = (a,b)$ definieren wir

$$\psi(t) := \int_a^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dann gilt $\psi \in \mathcal{D}(I)$ und $\partial_t \psi = \varphi$. Wegen $\frac{dT}{dt} = 0$, gilt $\langle T, \partial_t \psi \rangle = 0$. Also folgt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ mit $\int_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$ sofort $\langle T, \varphi \rangle = 0$.
Sei nun $\eta \in \mathcal{D}(I)$ mit $\int_I \eta(t)\,\mathrm{d}t = 1$ beliebig und sei $x := \langle T, \eta \rangle \in X$. Für beliebiges $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ definieren wir

$$\tilde{\varphi} := \varphi - \left(\int_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right) \eta.$$

Dann gilt $\int_I \tilde{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t = 0$ und daher $\langle T, \tilde{\varphi} \rangle = 0$. Aus der Linearität von T folgt dann

$$\langle T, \varphi \rangle = \left\langle T, \left(\int_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right) \eta \right\rangle = \left(\int_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right) \langle T, \eta \rangle = \left(\int_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right) x.$$

□

Bis zu diesem Punkt erscheinen die bisherigen Ergebnisse eher abstrakt, haben wir doch bisher erst zwei Beispiele von Distributionen kennengelernt. Die von integrierbaren Funktionen erzeugten Distributionen (vgl. Beispiel 4.10. 2.) sind im Hinblick auf partielle Differentialgleichungen wohl die wichtigsten Beispiele. Wir werden daher diese Klasse, die wir im Folgenden reguläre (vektorwertige) Distributionen nennen, näher beleuchten.

Definition 4.15 (reguläre Distribution)
Wir nennen $T \in \mathcal{D}'(I,X)$ ***reguläre Distribution****, falls ein $f \in L^1_{loc}(I,X)$ existiert, so dass $T = T_f$ in $\mathcal{D}'(I,X)$, das heisst*

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_I f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, gilt.

Lemma 4.16
Die Abbildung

$$T : L^1_{loc}(I,X) \to \mathcal{D}'(I,X),\ f \mapsto T_f,$$
$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_I f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

ist linear, injektiv und stetig. Wir schreiben daher

$$L^1_{loc}(I,X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(I,X).$$

Beweis. Die Linearität von T ist klar. Mit $K := \operatorname{supp}\varphi$ folgt die Stetigkeit von T aus der Abschätzung

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| = \left|\int_I f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{\operatorname{supp}(\varphi)} f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \|f\|_{L^1(K,X)}\,\nu_{0,K}(\varphi).$$

Die Injektivität von T folgt aus dem **Fundamentallemma der Variationsrechnung:** Zu zeigen ist, dass aus

$$\int_I f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, schon $f = 0$ fast überall in I folgt. Da I als offenes Intervall eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist, reicht es zu zeigen, dass für alle kompakten Teilmengen $K \subset\subset I$ gilt: $f = 0$ fast überall in K.
Mit $\delta := \frac{1}{2}\operatorname{dist}(K, \mathbb{R}\setminus I)$, $a := \inf K - \delta$ und $b := \sup K + \delta$ gilt $K \subset [a+\delta, b-\delta]$. Definieren wir außerdem

$$\tilde{f}(t) := \begin{cases} f(t), & t \in [a,b], \\ 0, & t \notin [a,b], \end{cases}$$

so gilt $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}, X)$.
Sei $\omega \in C_0^\infty(-1,1)$ mit $\int_{\mathbb{R}}\omega(t)\,\mathrm{d}t = 1$ ein Glättungskern. Dann gilt für

$$\omega_k(t) := k\,\omega(kt)$$

$\omega_k \in C_0^\infty(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ und $\int_{\mathbb{R}}\omega_k(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Außerdem gilt $f_k := \tilde{f} * \omega_k \to f$ in $L^1(\mathbb{R}, X)$.
Für $k > \frac{1}{\delta}$ und festes $s \in K$ ist die Funktion $t \mapsto \omega_k(s-t)$ glatt und ihr Träger ist Teilmenge von

$$s + [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}] \subset K + [-\delta, \delta] \subset [a,b] \subset\subset I$$

ist. Nach Annahme gilt also für $k > \frac{1}{\delta}$

$$\begin{aligned} f_k(s) = \left(\tilde{f} * \omega_k\right)(s) &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t)\,\omega_k(s-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f(t)\,\omega_k(s-t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\omega_k(s-t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

für alle $s \in K$. das heisst aber $f_{k|K} = 0$.
Wegen $f_k \to \tilde{f}$ in $L^1(\mathbb{R}, X)$ folgt $f_{k|K} \to \tilde{f}_{|K} = f_{|K}$ in $L^1(K, X)$ und somit $f_{|K} = 0$.
□

Wir kommen nun zur Zeitableitung regulärer Distributionen.
Mittels T erzeugt $u \in L^1_{\text{loc}}(I, X)$ die reguläre Distribution $T_u \in \mathcal{D}'(I, X)$. Auf diese so erhaltene Distribution können wir nun natürlich

$$\frac{d}{dt} : \mathcal{D}'(I, X) \to \mathcal{D}'(I, X)$$

anwenden. Die Injektivität von T erlaubt uns die Identifikation von u und T_u und wir definieren für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$

$$\left\langle \frac{du}{dt}, \varphi \right\rangle := \left\langle \frac{dT_u}{dt}, \varphi \right\rangle = - \langle T_u, \partial_t \varphi \rangle = - \langle u, \partial_t \varphi \rangle .$$

Falls nun die Distribution $\frac{du}{dt}$ im Bild von $L^1_{\text{loc}}(I, X)$ unter T liegt, das heisst falls ein Element $v \in L^1_{\text{loc}}(I, X)$ existiert mit

$$\frac{du}{dt} = \frac{dT_u}{dt} = T_v,$$

so erhalten wir für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ die Identität

$$\langle v, \varphi \rangle = \langle T_v, \varphi \rangle = \left\langle \frac{dT_u}{dt}, \varphi \right\rangle = -\langle u, \partial_t \varphi \rangle,$$

die äquivalent ist zur Forderung

$$\int_I v(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t = - \int_I u(t)\, \partial_t \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. Wir identifizieren dann v mit $\frac{du}{dt}$. Diese Vorüberlegung rechtfertigt nun

Definition 4.17 (distributionelle Zeitableitung von L^1_{loc}-Funktionen)
Eine Funktion $u \in L^1_{loc}(I, X)$ besitzt eine (reguläre) Zeitableitung im Sinne vektorwertiger Distributionen (mit Werten in X), falls ein Element $v \in L^1_{loc}(I, X)$ existiert mit

$$\frac{dT_u}{dt} = T_v \text{ in } \mathcal{D}'(I, X),$$

das heisst falls für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ gilt:

$$- \int_I u(t)\, \partial_t \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \int_I v(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$$

Wir schreiben dann $v = \frac{du}{dt}$ und nennen v die ***distributionelle Zeitableitung*** *von u oder die* ***Zeitableitung im Sinne vektorwertiger Distributionen*** *von u.*

Bemerkung 4.18 (Eindeutigkeit der Ableitung)
Wegen Lemma 4.16 ist die Ableitung im Sinne vektorwertiger Distributionen eindeutig bestimmt.

Lemma 4.19

1. *Für $u \in C^1(I,X)$ gilt*
$$\frac{du}{dt} = \frac{dT_u}{dt} = T_{u_t} = u_t,$$
das heisst: differenzierbare Funktionen besitzen eine Ableitung im Sinne vektorwertiger Distributionen und diese stimmt mit der klassischen Ableitung überein.

2. *Besitzt $u \in L^1_{loc}(I,X)$ eine distributionelle Zeitableitung $\frac{du}{dt} \in L^1_{loc}(I,X)$, so gilt für alle $\eta \in C^\infty(I)$ die Produktregel*
$$\frac{d(u\eta)}{dt} = \frac{du}{dt}\eta + u\partial_t\eta.$$

Beweis. Blatt 8, Aufgabe 1

1. Wir wissen schon von Übungsblatt 6, Aufgabe 4, dass für u der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der Form
$$u(s) = u(s_0) + \int_{s_0}^{s} u_t(t)\,\mathrm{d}t$$
für alle $s, s_0 \in I$ gilt, wobei u_t hier die starke Ableitung von u bezeichnet. Ist nun $\eta \in C^1(I)$, so gilt $u\eta \in C^1(I,X)$ und $(u\eta)_t = u_t\,\eta + u\,\partial_t\eta$ im klassischen Sinn. Der Hauptsatz angewandt auf $u\eta$ ergibt daher
$$\int_{s_0}^{s} u(t)\,\partial_t\eta(t)\,\mathrm{d}t = (u\eta)(s) - (u\eta)(s_0) - \int_{s_0}^{s} u_t(t)\,\eta(t)\,\mathrm{d}t.$$
Für $\eta = \varphi \in \mathcal{D}(I)$ folgt somit
$$\int_I u(t)\,\partial_t\varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_I u_t(t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t$$
und daher
$$\left\langle \frac{du}{dt}, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{dT_u}{dt}, \varphi \right\rangle = -\langle u, \partial_t\varphi\rangle = \langle u_t, \varphi\rangle = \langle (T_u)_t\,, \varphi\rangle\,.$$

2. Seien $\eta \in C^\infty(I)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{dT_{\eta u}}{dt}, \varphi \right\rangle &= -\langle \eta u, \partial_t \varphi \rangle = -\langle T_{\eta u}, \partial_t \varphi \rangle \\
&= -\int_I \eta u \, \partial_t \varphi \, \mathrm{d}t = -\int_I u \partial_t(\varphi\eta) \, \mathrm{d}t + \int_I u\varphi \partial_t \eta \, \mathrm{d}t \\
&= \left\langle \frac{du}{dt}, \varphi\eta \right\rangle + \langle u, \varphi \partial_t \eta \rangle \\
&= \int_I \frac{du}{dt} \eta\varphi \, \mathrm{d}t + \int_I u\varphi\partial_t\eta \, \mathrm{d}t \\
&= \left\langle \frac{du}{dt}\eta, \varphi \right\rangle + \langle u\partial_t\eta, \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{dT_{\eta u}}{dt} = \frac{du}{dt}\eta + u\partial_t\eta.$$

□

Besitzt $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(I, X)$ eine distributionelle Ableitung im Sinne von Definition 4.17, so gilt

$$\frac{dT_u}{dt} = T_{\frac{du}{dt}} \text{ in } \mathcal{D}'(I, X)$$

oder äquivalent: Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ gilt

$$\left\langle \frac{dT_u}{dt}, \varphi \right\rangle = \left\langle T_{\frac{du}{dt}}, \varphi \right\rangle,$$

wobei diese Gleichheit als Identität im Banachraum X zu verstehen ist.
Vor allem für Anwendungen ist es jedoch entscheidend, die allgemeinere Situation zu betrachten, in der $\frac{dT_u}{dt}$ eine Distribution mit Werten in einem größeren Raum definiert. Seien X, Y Banachräume, die stetig und injektiv in einen dritten Banachraum Z eingebettet werden können, das heisst, es gelte $X, Y \hookrightarrow Z$. (Ohne Beweis sei darauf verwiesen, dass diese Situation vorliegt, falls ein topologischer Vektorraum V existiert, in den sowohl X als auch Y stetig und injektiv eingebettet werden können.) Dann gilt in natürlicher Weise auch $\mathcal{D}'(I, X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(I, Z)$ und $\mathcal{D}'(I, Y) \hookrightarrow \mathcal{D}'(I, Z)$, wobei die Einbettungen injektiv sind. Die distributionelle Ableitung von $T \in \mathcal{D}'(I, X)$ kann vermöge dieser injektiven Einbettung mit einer Z-wertigen Distribution identifiziert werden. (Auch diese scheinbar offensichtliche Aussage verwenden wir ohne Beweis.) Wir

können daher sagen, $T \in \mathcal{D}'(I, X)$ hat eine distributionelle Ableitung in $\mathcal{D}'(I, Y)$, falls ein $S \in \mathcal{D}'(I, Y) \hookrightarrow \mathcal{D}'(I, Z)$ existiert, so dass für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$

$$\left\langle \frac{dT}{dt}, \varphi \right\rangle = \langle S, \varphi \rangle$$

gilt, wobei diese Gleichheit als Identität in Z aufzufassen ist.
Die gleichen Identifikationen lassen sich für den Fall regulärer Distributionen rechtfertigen. Wir sagen, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(I, X)$ hat eine distributionelle Zeitableitung in $L^1_{\mathrm{loc}}(I, Y)$, falls ein $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(I, Y)$ existiert mit $\frac{dT_u}{dt} = T_v$. Diese Identität wird in $\mathcal{D}'(I, Z)$ aufgefasst und ist äquivalent zu

$$-\int_I u(t)\, \partial_t \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \int_I v(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. Die letzte Gleichheit ist als Identität in Z zu verstehen, denn vermöge der Einbettungen $X \hookrightarrow Z$ und $Y \hookrightarrow Z$ sind die Integrale als Z-wertige Bochnerintegrale wohldefiniert.
Wir bemerken außerdem noch, dass man im Falle $X \hookrightarrow Y$ einfach $Z = Y$ wählen kann und alle der oben genannten Identifikationen in Y stattfinden.

4.3 Gelfand-Tripel und Verallgemeinerte Zeitableitung

Lässt man zwei unterschiedliche Wertebereiche für Funktion und distributionelle Ableitung zu, gewinnt man einiges an für Anwendungen notwendiger Flexibilität. Eine besonders reichhaltige und gleichzeitig für parabolische Probleme charakteristische Struktur von Einbettungen zwischen Banachräumen sind sogenannten **Gelfand- oder Evolutionstripel.** Wir werden zunächst Gelfand-Tripel definieren und im Anschluss daran sehen, dass diese Struktur auf einen Spezialfall der distributionellen Zeitableitung führt.

Definition 4.20 (Gelfand-Tripel)
*Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ ein **Banachraum** und $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ ein **Hilbertraum.** Die Einbettung $V \hookrightarrow H$ sei **stetig und dicht,** das heisst einerseits gelte für alle $v \in V$ die Ungleichung*

$$\|v\|_H \leq C\, \|v\|_V\,,$$

mit einer von v unabhängigen Konstante C, und zusätzlich gelte

$$\overline{V}^{\|\cdot\|_H} = H.$$

Der Riesz'sche Darstellungssatz liefert $H \cong H^*$, wobei der (Riesz-)Isomorphismus definiert ist durch

$$R : H \to H^*,$$
$$\langle Rf, u \rangle_H := (f, u)_H.$$

Die Einschränkung von Funktionalen definiert eine stetige, lineare und injektive Abbildung

$$\begin{aligned} E : H \cong & H^* \to V^*, \\ & f \mapsto f_{|V}. \end{aligned}$$

Für $u, v \in V \hookrightarrow H \overset{E}{\hookrightarrow} V^*$ *gilt sogar*

$$\langle Eu, v\rangle_V = (u, v)_H = (v, u)_H = \langle Ev, u\rangle_V.$$

Insgesamt gilt dann

$$V \overset{dicht}{\hookrightarrow} H \overset{R}{\cong} H^* \overset{E}{\hookrightarrow} V^*. \tag{4.21}$$

Ein Tripel (V, H, V^*) *zusammen mit den Einbettungen (4.21) heißt* ***Gelfand-Tripel****. Ist* V *zusätzlich noch reflexiv, so ist auch die Einbettung* $H^* \hookrightarrow V^*$ *dicht.*

Beweis der Behauptungen aus Definition 4.20. Blatt 8, Aufgabe 3
Die Linearität von E ist evident. Die Stetigkeit von E folgt aus der folgenden Abschätzung für $f \in H^*$:

$$\begin{aligned} \|Ef\|_{V^*} &= \sup_{\|u\|_V=1} |\langle Ef, u\rangle_V| \\ &= \sup_{\|u\|_V=1} |(f, u)_H| \\ &\leq \sup_{\|u\|_V=1} (\|f\|_H \|u\|_H) \\ &\leq C \sup_{\|u\|_V=1} (\|f\|_H \|u\|_V) \\ &\leq C \|f\|_H , \end{aligned}$$

wobei wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung in H und die Stetigkeit der Einbettung $V \hookrightarrow H$ verwendet haben. Um die Injektivität von E zu zeigen sei $f \in H$ mit $Ef = 0$ in V^*, das heisst es gelte

$$\langle Ef, v\rangle_V = 0$$

für alle $v \in V$. Nach Definition von E gilt dann $(f, v)_H = 0$ für alle $v \in V$. Wegen der Dichtheit der Einbettung $V \hookrightarrow H$ existiert eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ mit $v_n \to f$ in H für $n \to \infty$. Dann gilt aber

$$0 = (f, v_n)_H \to (f, f)_H = \|f\|_H^2$$

und daher $f = 0$ in H. Da E linear ist, folgt daraus sofort die Injektivität von E.
Nun bleibt noch die Dichtheit von $E(H)$ in V^* zu zeigen. Wegen der Linearität von E ist $E(H)$ ein linearer Teilraum von V^* und daher insbesondere konvex. Würde

$$\overline{E(H)}^{\|\cdot\|_{V^*}} \subsetneq V^*,$$

gelten, so existierte wegen der geometrischen Form des Satzes von Hahn-Banach ein $F \in (V^*)^*$, $F \neq 0$ mit

$$\langle F, Ef \rangle_{V^*} = 0$$

für alle $f \in H$. Da V reflexiv ist, existiert ein $v \in V$ mit $F = J_V v$, wobei

$$\begin{gathered} J_V : V \to V^{**}, \\ \langle J_V v, g \rangle_{V^*} := \langle g, v \rangle_V, \end{gathered}$$

die kanonische Isometrie bezeichnet. Dann gilt aber für alle $f \in H$

$$0 = \langle F, Ef \rangle_{V^*} = \langle J_V v, Ef \rangle_{V^*} = \langle Ef, v \rangle_V = (f, v)_H.$$

Da die Einbettung $V \hookrightarrow H$ dicht ist, existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ mit $f_n \to v$ in H für $n \to \infty$. Dann gilt aber

$$0 = (f_n, v)_H \to (v, v)_H = \|v\|_H^2,$$

also $v = 0$ und damit $F = J_V v = 0$. Das ist aber ein Widerspruch zu $F \neq 0$ und somit muss $E(H)$ dicht in V^* liegen. □

Wir kommen nun zum Begriff der verallgemeinerten Zeitableitung.

Definition 4.22 (verallgemeinerte Zeitableitung)
*Sei (V, H, V^*) ein Gelfand-Tripel. Eine Funktion $u \in L^p(I, V)$ mit $1 < p < \infty$ besitzt eine **verallgemeinerte Zeitableitung** in $(L^p(I, V))^* \cong L^{p'}(I, V^*)$, falls $d_t u \in L^{p'}(I, V^*)$ existiert, sodass*

$$\int_I \langle d_t u(t), v \rangle_V \varphi(t)\, \mathrm{d}t = -\int_I (u(t), v)_H \partial_t \varphi(t)\, \mathrm{d}t$$

für alle $v \in V$ und alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ gilt.

Dieser Ableitungsbegriff unterscheidet sich auf den ersten Blick von der distributionellen Ableitung, die wir weiter oben definiert hatten. Tatsächlich ist die Zeitableitung im Sinne vektorwertiger Distributionen das allgemeinere Objekt (auch wenn die Namensgebung in dieser Hinsicht irreführend sein mag). Unter gewissen Annahmen an die zugrundeliegenden Räume stimmen die Begriffe aber überein, wie das folgende Lemma zeigt:

Lemma 4.23 (Kompabilität der Ableitungsbegriffe)
Sei (V, H, V^*) ein Gelfand-Tripel und sei $1 < p < \infty$. Besitzt $u \in L^p(I, V)$ eine verallgemeinerte Zeitableitung $d_t u$ im Sinne von Definition 4.22, so besitzt u eine Zeitableitung $\frac{dT_u}{dt} \in \mathcal{D}'(I, V^*)$ im Sinne V^*-wertiger Distributionen und es gilt

$$\frac{dT_u}{dt} = T_{d_t u}.$$

Besitzt $u \in L^p(I, V)$ eine Zeitableitung im Sinne V^*-wertiger Distributionen $\frac{dT_u}{dt}$ in $L^{p'}(I, V^*)$, das heisst falls $\frac{du}{dt} \in L^{p'}(I, V^*)$ mit $\frac{dT_u}{dt} = T_{\frac{du}{dt}}$ existiert, so besitzt u eine verallgemeinerte Zeitableitung $d_t u$ im Sinne von Definition 4.22 und es gilt

$$d_t u = T_{\frac{du}{dt}} \in L^{p'}(I, V^*).$$

Beweis. Sei zunächst $d_t u$ die verallgemeinerte Zeitableitung von u im Sinne von Definition 4.22. Insbesondere gilt dann für alle $v \in V$ und alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ die Identität

$$\int_I \langle d_t u(t), v \rangle_V \varphi(t) \,\mathrm{d}t = -\int_I (u(t), v)_H \partial_t \varphi(t) \,\mathrm{d}t. \tag{4.24}$$

Betrachte die konstanten Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 : I &\to V^*, \\ t &\mapsto \int_I d_t u(t) \varphi(t) \,\mathrm{d}t; \\ f_2 : I &\to V \hookrightarrow V^*, \\ t &\mapsto \int_I u(t) \partial_t \varphi(t) \,\mathrm{d}t; \\ v : I &\to V, \\ t &\mapsto v. \end{aligned}$$

Mit der Darstellung der Dualität in Bochnerräumen folgt aus (4.24) für alle $v \in V$

$$\begin{aligned} \langle f_1, v \rangle &= \int_I \langle d_t u(t), v \rangle_V \varphi(t) \,\mathrm{d}t \\ &= -\int_I (u(t), v)_H \partial_t \varphi(t) \,\mathrm{d}t \\ &= -\int_I \langle u(t), v \rangle_V \partial_t \varphi(t) \,\mathrm{d}t \\ &= \langle f_2, v \rangle, \end{aligned}$$

wobei wir im dritten Schritt verwendet haben, dass $u(t) \in V$ gilt für fast alle $t \in I$ und dass (V, H, V^*) ein Gelfand-Tripel ist. Mit dem Satz von Hahn-Banach folgt dann $f_1 = f_2$ in V^*. Insbesondere gilt

$$\int_I d_t u(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_I u(t)\partial_t\varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

woraus $\frac{dT_u}{dt} = T_{d_t u}$ folgt, da $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ beliebig war.
Sei nun umgekehrt $\frac{du}{dt} \in L^{p'}(I, V^*)$ mit $\frac{dT_u}{dt} = T_{\frac{du}{dt}}$, das heisst für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ gelte

$$-\int_I u(t)\partial_t\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \langle\frac{dT_u}{dt}, \varphi\rangle = \langle T_{\frac{du}{dt}}, \varphi\rangle = \int_I \frac{du}{dt}(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ ergibt sich dann aber

$$\begin{aligned} -\int_I u(t)\partial_t\varphi(t)\,\mathrm{d}t &\in V \text{ und} \\ \int_I \frac{du}{dt}(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t &\in V^*. \end{aligned}$$

Für beliebiges $v \in V$ gilt daher

$$\begin{aligned} \int_I \left\langle \frac{du}{dt}(t), v \right\rangle_V \varphi(t)\,\mathrm{d}t &= \int_I \left\langle \frac{du}{dt}(t)\varphi(t), v \right\rangle_V \mathrm{d}t \\ &= \left\langle \int_I \frac{du}{dt}(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t, v \right\rangle_V \\ &= -\left\langle \int_I u(t)\partial_t\varphi(t)\,\mathrm{d}t, v \right\rangle_V \\ &= -\int_I \langle u(t)\partial_t\varphi(t), v\rangle_V\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_I \langle u(t), v\rangle_V\,\partial_t\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_I (u(t), v)_H\,\partial_t\varphi(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Also gilt $\frac{du}{dt} = d_t u$ und $d_t u = \frac{dT_u}{dt} = T_{\frac{du}{dt}} \in L^{p'}(I, V^*)$. □

5 Verallgemeinerte Sobolevräume

Nachdem wir im vorigen Kapitel einen adäquaten schwachen Zeitableitungsbegriff für Banachraum-wertige Funktionen untersucht haben, definieren wir nun, in Analogie zur Konstruktion von Sobolevräumen im Kontext elliptischer Gleichungen, sogenannte verallgemeinerte Sobolevräume.
Wir untersuchen die verallgemeinerten Sobolevräume zunächst auf ihre Vollständigkeit, Separabilität und Reflexivität, um dann in einem zweiten Schritt stetige Einbettungen von verallgemeinerten Sobolevräumen in Räume stetiger Banachraum-wertiger Funktionen zu beweisen. Schließlich beweisen wir eine partielle Integrationsformel für verallgemeinerte Sobolev-Funktionen mit Werten in einem Gelfand-Tripel. Dieses Resultat gehört zu den Grundbausteinen der sogenannten Theorie (pseudo-)monotoner Operatoren zur Lösung parabolischer Gleichung.

5.1 Verallgemeinerte Sobolevräume

Definition 5.1 (verallgemeinerter Sobolevraum)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $1 \leq p \leq \infty$. Dann heißt

$$W^{1,p}(I,X) := \left\{ u \in L^p(I,X) \,\middle|\, \frac{du}{dt} \in L^p(I,X) \right\}$$

***verallgemeinerter Sobolevraum**. Wie wir im vorigen Kapitel gesehen haben, kann es sinnvoll sein, Fälle zu betrachten, in denen die Zeitableitung im Sinne vektorwertiger Distributionen $\frac{du}{dt}$ ihre Werte in einem größeren Banachraum $Y \supset X$ annimmt. In diesem Fall definieren wir für $1 \leq p, q \leq \infty$*

$$W^{1,p,q}(I,X,Y) := \left\{ u \in L^p(I,X) \,\middle|\, \frac{du}{dt} \in L^q(I,Y) \right\}$$

und nennen auch $W^{1,p,q}(I,X,Y)$ verallgemeinerten Sobolevraum.

Aus der Vollständigkeit von Bochnerräumen und der Stetigkeit von $\frac{d}{dt}$ folgt direkt

Theorem 5.2 (Vollständigkeit)

Verallgemeinerte Sobolevräume sind Banachräume mit den Normen

$$\|u\|_{W^{1,p}(I,X)} := \|u\|_{L^p(I,X)} + \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L^p(I,X)},$$
$$\|u\|_{W^{1,p,q}(I,X,Y)} := \|u\|_{L^p(I,X)} + \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L^q(I,Y)}.$$

Beweis. ÜA □

Proposition 5.3 (Separabilität, Reflexivität)

1. *Für $1 \leq p, q < \infty$ und separable Banachräume X und Y sind auch die Räume $W^{1,p}(I,X)$ und $W^{1,p,q}(I,X,Y)$ separabel.*

2. *Für $1 < p, q < \infty$ und reflexive Banachräume X und Y sind auch die Räume $W^{1,p}(I,X)$ und $W^{1,p,q}(I,X,Y)$ reflexiv.*

Beweis. Wir betrachten nur die Räume $W^{1,p}(I,X)$, denn für die Räume $W^{1,p,q}(I,X,Y)$ verläuft der Beweis mit offensichtlichen Modifikationen völlig analog.

$$P : W^{1,p}(I,X) \to P\left(W^{1,p}(I,X)\right) \subset E := L^p(I,X) \times L^p(I,X),$$
$$u \mapsto Pu := \left(u, \frac{du}{dt}\right).$$

Versehen wir den Raum E mit der Norm

$$\|(u,v)\|_E := \|u\|_{L^p(I,X)} + \|v\|_{L^p(I,X)},$$

so vermittelt P einen isometrischen Isomorphismus zwischen $W^{1,p}(I,X)$ und dem abgeschlossenen Teilraum $P\left(W^{1,p}(I,X)\right) \subset E$. Die Separabilität und Reflexivität der Bochnerräume überträgt sich daher sofort auf die verallgemeinerten Sobolevräume, da Separabilität stabil unter Isometrien und Reflexivität stabil unter Isomorphismen ist. □

Bemerkung 5.4

Aufgrund ihrer Separabilität und Reflexivität erben die verallgemeinerten Sobolevräume die (schwachen) Kompaktheitseigenschaften der entsprechenden Bochnerräume. Diese Tatsache ist von grundlegender Bedeutung für die Konstruktion von Approximationsverfahren im Kontext parabolischer Gleichungen und deren Konvergenz.

5.2 Stetige Einbettungen in Räume Hölder-stetiger Funktionen

Für reelle Sobolevfunktionen $u \in W^{1,p}(I)$ gilt aufgrund ihrer Absolutstetigkeit und der Hölder-Ungleichung für $1 \leq p \leq \infty$ die Einbettung

$$W^{1,p}(I) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{1}{p}}(\bar{I}),$$

wobei $C^{0,1-\frac{1}{p}}(I)$ den Raum der $(1-1/p)$-Hölder-stetigen Funktionen bezeichnet. Insbesondere kann jede Funktion $u \in W^{1,p}(I)$ mit einer stetigen Funktion identifiziert werden. In diesem Sinne ist für $u \in W^{1,p}(I)$ die Auswertung $t \mapsto u(t)$ für alle $t \in \bar{I}$ wohldefiniert. Ein analoges Resultat gilt für Funktionen in verallgemeinerten Sobolevräumen. Natürlich muss man dabei die klassischen Hölderräume durch Räume Banachraum-wertiger Hölder-stetiger Funktionen ersetzen.

Definition 5.5 (Hölderräume)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $\alpha \in (0,1]$. Dann heißt

$$C^{0,\alpha}(I,X) := \left\{ u \in C_b^0(I,X) \,\middle|\, \exists C > 0 : \left\|u(t) - u(t')\right\|_X \leq C|t-t'|^\alpha,\ t,t' \in I \right\}$$

mit

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(I,X)} := \|u\|_{C_b^0(I,X)} + \sup_{t \neq t' \in I} \frac{\|u(t) - u(t')\|_X}{|t-t'|^\alpha}$$

*der Raum der **α-Hölder-stetigen (X-wertigen) Funktionen**.*

Der Raum $C_b^0(I,X)$ in der Definition bezeichnet den Raum der stetigen, beschränkten Funktionen $u : I \to X$. Mit

$$\|u\|_{C_b^0(I,X)} := \sup_{t \in I} \|u(t)\|_X$$

ist $C_b^0(I,X)$ ein Banachraum. Daraus folgt leicht, dass auch die Räume $C^{0,\alpha}(I,X)$ für $0 < \alpha \leq 1$ Banachräume sind.
Der erste Schritt im Beweis der Einbettung

$$W^{1,p}(I,X) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{1}{p}}(I,X)$$

für $1 < p < \infty$ besteht in

Lemma 5.6 (Hauptsatz)
Sei $u \in W^{1,p}(I,X)$, $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist u stetig und für alle $s, s' \in \bar{I}$ gilt

$$u(s) = u(s') + \int_{s'}^{s} \frac{du}{dt}(t)\, \mathrm{d}t.$$

Beweis. Wie im entsprechenden Beweis für den reellen Fall definieren wir eine Funktion

$$g : I \to X,$$
$$g(s) := \int_{s'}^{s} \frac{du}{dt}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Man beachte, dass g wegen $\frac{du}{dt} \in L^p(I,X) \hookrightarrow L^1_{\mathrm{loc}}(I,X)$ wohldefiniert ist. Wir zeigen nun, dass die so definierte Funktion g stetig ist. Sei dazu $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ eine Folge mit $s_n \to s \in I$ für $n \to \infty$. Wegen

$$\left\| \chi_{(s',s_n)} \frac{du}{dt} \right\|_X = \chi_{(s',s_n)} \left\| \frac{du}{dt} \right\|_X \leq \chi_I \left\| \frac{du}{dt} \right\|_X \in L^1(I,X)$$

und

$$\chi_{(s',s_n)} \left\| \frac{du}{dt} \right\|_X \to \chi_{(s',s)} \left\| \frac{du}{dt} \right\|_X \text{ fast überall in } I$$

folgt aus dem Satz über majorisierte Konvergenz von Lebesgue bereits

$$g(s_n) \to g(s) \text{ in } X$$

und damit die Stetigkeit von g. Wegen

$$\|g\|_{L^1(I,X)} \leq C \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^1(I,X)}$$

definiert g eine reguläre X-wertige Distribution $T_g \in \mathcal{D}'(I,X)$. Im nächsten Schritt zeigen wir nun, dass im Sinne X-wertiger Distributionen die Identität

$$\frac{dT_g}{dt} = \frac{du}{dt}$$

gilt. Für $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{dT_g}{dt}, \varphi \right\rangle &= -\langle g, \partial_t \varphi \rangle = -\int_I g(s)\partial_t\varphi(s)\,\mathrm{d}s \\
&= -\int_I \left(\int_{s'}^{s} \frac{du}{dt}(t)\,\mathrm{d}t \right) \partial_t\varphi(s)\,\mathrm{d}s \\
&= -\int_I \int_I \chi_{(s',\sup I)}(s)\chi_{(s',s)}(t)\frac{du}{dt}(t)\partial_t\varphi(s)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&\quad - \int_I \int_I \chi_{(\inf I,s')}(s)\left(-\chi_{(s,s')}(t)\right)\frac{du}{dt}(t)\partial_t\varphi(s)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&\overset{*}{=} -\int_I \int_I \chi_{(s',\sup I)}(t)\chi_{(t,\sup I)}(s)\frac{du}{dt}(t)\partial_t\varphi(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_I \int_I \chi_{(\inf I,s')}(t)\chi_{(\inf I,t)}(s)\frac{du}{dt}(t)\partial_t\varphi(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= -\int_{s'}^{\sup I} \frac{du}{dt}(t)\left(\int_t^{\sup I} \partial_t\varphi(s)\,\mathrm{d}s \right)\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{\inf I}^{s'} \frac{du}{dt}(t)\left(\int_{\inf I}^{t} \partial_t\varphi(s)\,\mathrm{d}s \right)\mathrm{d}t \\
&\overset{**}{=} \int_{s'}^{\sup I} \frac{du}{dt}(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\inf I}^{s'} \frac{du}{dt}(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left\langle \frac{du}{dt}, \varphi \right\rangle.
\end{aligned}$$

Bei $*$ haben wir die Identitäten

$$\begin{aligned}
\chi_{(s',\sup I)}(s)\chi_{(s',s)}(t) &= \chi_{(s',\sup I)}(t)\chi_{(t,\sup I)}(s), \\
\chi_{(\inf I,s')}(s)\chi_{(s,s')}(t) &= \chi_{(\inf I,s')}(t)\chi_{(\inf I,t)}(s).
\end{aligned}$$

und in $**$ haben wir den Hauptsatz und die Tatsache, dass φ einen kompakten Träger in I hat, ausgenutzt. Also gilt $\frac{dT_g}{dt} = \frac{du}{dt}$ und wegen der Linearität der distributionellen Zeitableitung $\frac{d}{dt}$ daher

$$\frac{d}{dt}(T_g - T_u) = \frac{d}{dt}(g - u) = 0.$$

Wegen Proposition 4.14 existiert ein $x \in X$ mit $u = x + g$. Da g stetig ist, ist u fast überall gleich einer stetigen Funktion. Mithin folgt wegen $u(s') = x + g(s') = x$ schließlich

$$u(s) = x + g(s) = u(s') + \int_{s'}^{s} \frac{du}{dt}(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Wir können nun den oben angekündigten Einbettungssatz beweisen.

Theorem 5.7 (Einbettung in Hölder-stetige Funktionen)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und. Dann gilt

$$W^{1,p}(I, X) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{1}{p}}(\bar{I}, X),\ 1 \leq p \leq \infty.$$

Bemerkung 5.8
Sinngemäß gilt der Satz auch für unbeschränkte Intervalle.
Der Satz besagt, dass jede Funktion im verallgemeinerten Sobolevraum $W^{1,p}(I, X)$ fast überall gleich einer Hölderstetigen Funktion ist und daher mit dieser Funktion identifiziert werden kann.

Beweis. Sei $u \in W^{1,p}(I, X)$. Wegen $\left\|\frac{du}{dt}(\cdot)\right\|_X \in L^p(I) \subset L^1(I)$ definiert

$$\nu(A) := \int_A \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X \mathrm{d}t$$

nach dem Satz von Radon-Nikodym ein zum Lebesgue-Maß absolut-stetiges Maß. Insbesondere existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für eine Menge A mit $\lambda(A) \leq \delta$ bereits $\nu(A) \leq \varepsilon$ gilt. Dann gilt aber für $|s_1 - s_2| \leq \delta$ wegen

$$u(s) = u(s') + \int_{s'}^{s} \frac{du}{dt}(t)\, \mathrm{d}t$$

die Abschätzung

$$\|u(s_1) - u(s_2)\|_X \leq \int_{s_1}^{s_2} \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X \mathrm{d}t \leq \varepsilon,$$

das heisst u ist stetig. Weiter gilt für alle $s \in I$

$$\|u(s)\|_X \leq \|u(s')\|_X + \int_{s'}^{s} \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X \mathrm{d}t \leq \|u(s')\|_X + \int_I \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X \mathrm{d}t$$

und somit

$$\|u\|_{C^0(I,X)} = \sup_{s \in I} \|u(s)\|_X \leq \|u(s')\|_X + \int_I \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X \mathrm{d}t.$$

Integration über s' liefert zusammen mit der Hölder-Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|u\|_{C^0(I,X)} &= \frac{1}{|I|} \int_I \|u\|_{C^0(I,X)}\, \mathrm{d}s' \\
&\leq \frac{1}{|I|} \left(\int_I \|u(s')\|_X\, \mathrm{d}s' + \int_I \left(\int_I \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s' \right) \\
&\leq \frac{1}{|I|} \left(|I|^{1-\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(I,X)} + |I|^{2-\frac{1}{p}} \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^p(I,X)} \right) \\
&\leq C \|u\|_{W^{1,p}(I,X)} \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

Die Konstante C hängt dabei nur von p und I, nicht aber von u ab.
Jetzt unterscheiden wir die Fälle $p = 1$, $1 < p < \infty$ und $p = \infty$.
Für den Fall $p = 1$ gilt

$$C^{0,1-\frac{1}{p}}(I, X) = C^{0,0}(I, X) := C^0(I, X)$$

und somit ist mit (5.9)

$$\|u\|_{C^0(I,X)} \leq C \|u\|_{W^{1,1}(I,X)},$$

das heisst insbesondere gilt

$$W^{1,1}(I, X) \hookrightarrow C^0(I, X).$$

Im Fall $1 < p < \infty$ erhalten wir wieder mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} \|u(s_1) - u(s_2)\|_X \leq \int_{s_1}^{s_2} \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X \mathrm{d}t &\leq \left\| \chi_{(s_1,s_2)} \right\|_{L^{p'}(I)} \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^p(I,X)} \\ &= |s_1 - s_2|^{1-\frac{1}{p}} \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^p(I,X)}. \end{aligned}$$

Da dabei $s_1, s_2 \in I$ beliebig sind, folgt

$$\sup_{s_1 \neq s_2 \in I} \frac{\|u(s_1) - u(s_2)\|_X}{|s_1 - s_2|^{1-\frac{1}{p}}} \leq \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^p(I,X)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(I,X)}. \tag{5.10}$$

Zusammen liefern (5.9) und (5.10)

$$\|u\|_{C^{0,1-\frac{1}{p}}(I,X)} = \|u\|_{C^0(I,X)} + \sup_{s_1 \neq s_2 \in I} \frac{\|u(s_1) - u(s_2)\|_X}{|s_1 - s_2|^{1-\frac{1}{p}}} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I,X)},$$

das heisst insbesondere, dass auch für den Fall $1 < p < \infty$ die stetige Einbettung

$$W^{1,p}(I, X) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{1}{p}}(\bar{I}, X).$$

gilt. Als Letztes betrachten wir noch den Fall $p = \infty$. Mit der Hölder-Ungleichung erhalten wir für beliebige $s_1, s_2 \in I$

$$\begin{aligned} \|u(s_1) - u(s_2)\|_X \leq \int_{s_1}^{s_2} \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X \mathrm{d}t &\leq |s_1 - s_2| \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^\infty(I,X)} \\ &\leq |s_1 - s_2| \, \|u\|_{W^{1,\infty}(I,X)}, \end{aligned} \tag{5.11}$$

das heisst u ist Lipschitz-stetig. Zusammen ergeben (5.9) und (5.11)

$$\|u\|_{C^{0,1}(I,X)} = \|u\|_{C^0(I,X)} + \sup_{s_1 \neq s_2 \in I} \frac{\|u(s_1) - u(s_2)\|_X}{|s_1 - s_2|} \leq C \|u\|_{W^{1,\infty}(I,X)},$$

was insbesondere die stetige Einbettung

$$W^{1,\infty}(I, X) \hookrightarrow C^{0,1}(\bar{I}, X)$$

beweist. □

5.3 Fortsetzbarkeit und dichte Teilmengen

Lemma 5.12 (Dichtheit)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall und $1 \leq p < \infty$. Sei weiter X ein Banachraum und $\mathscr{D} \subset X$ eine dichte Teilmenge. Dann gilt

$$\mathscr{C} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \, d_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, \varphi_i \in C^\infty(\bar{I}), d_i \in \mathscr{D} \right\} \hookrightarrow W^{1,p}(I, X),$$

wobei die Einbettung dicht ist.

Beweis. Satz 5.7 liefert die stetige Einbettung

$$W^{1,p}(I, X) \hookrightarrow C(\bar{I}, X)$$

Nach Korollar 2.9 existiert für $\frac{du}{dt} \in L^p(I, X)$ eine Folge

$$(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \left\{ \sum_{i=1}^{n} \eta_i d_i \,\middle|\, \eta_i \in C_0^\infty(I), d_i \in \mathscr{D} \right\},$$

mit der Eigenschaft

$$\lim_{n \to \infty} v_n = \frac{du}{dt} \text{ in } L^p(I, X).$$

Da $\mathscr{D}$ dicht in X liegt, existiert für $u(0) \in X$ eine Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ mit

$$\lim_{n \to \infty} d_n = u(0) \text{ in } X.$$

Wir definieren daher mit Hilfe des Hauptsatzes eine Folge von Funktionen

$$\begin{aligned} u_n &: I \to X, \\ u_n(t) &:= d_n + \int_0^t v_n(s) \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Für die so definierte Folge gilt dann

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \left\{ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i d_i \,\middle|\, \varphi_i \in C^\infty(\bar{I}), d_i \in \mathscr{D} \right\} \subset C^\infty(\bar{I}, X)$$

und nach Satz 5.6 folgt für $n \to \infty$

$$\frac{du_n}{dt} = (u_n)_t = v_n \to \frac{du}{dt} \text{ in } L^p(I, X).$$

Mit

$$F_n(t) := \int_0^t v_n(s)\,\mathrm{d}s \text{ und } F(t) := \int_0^t \frac{du}{dt}(s)\,\mathrm{d}s$$

erhalten wir also für $n \to \infty$

$$F_n \to F \text{ in } C_b^0(\bar{I}, X)$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \big(d_n + F_n\big) = u(0) + F = u \text{ in } C_b^0(\bar{I}, X).$$

Wegen $C_b^0(\bar{I}, X) \hookrightarrow L^p(I, X)$ gilt die letzte Konvergenz auch in $L^p(I, X)$. Für ein Element $u \in W^{1,p}(I, X)$ haben wir also $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{C}$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ in } W^{1,p}(I, X)$$

gefunden und damit die Behauptung des Satzes bewiesen. □

Für die explizite Konstruktion glatter Approximationsfolgen werden wir weiter unten wie im Fall klassischer Sobolevräume mittels Faltung mit einem sogenannten „mollifier“ argumentieren. Da die Faltung den Träger der Ausgangsfunktion „ausschmiert“, muss man sie zunächst passend fortsetzen. Den einfachsten Zugang stellt hierbei die triviale Fortsetzung der Funktion durch Null dar. Da dabei allerdings Sprünge entstehen können, die dazu führen, dass die so fortgesetzte Funktion nicht mehr schwach differenzierbar ist, ist diese Art der Fortsetzung von Funktionen im Kontext von (verallgemeinerten) Sobolevräumen nicht geeignet. Die Fortsetzung einer Funktion durch Spiegelung hingegen erhält die schwache Differenzierbarkeit, wie das nächste Theorem zeigt.
Wir nehmen im Folgenden immer an, dass X und Y Banachräume mit der Eigenschaft $X \subset Y$ sind. Der Satz gilt allerdings sinngemäß auch dann, wenn X und Y jeweils stetig in einen dritten Banachraum Z eingebettet sind.

Theorem 5.13 (Fortsetzung durch Spiegelung)
Sei $I = (0, T)$ und $u \in L^1(I, X)$. Wir definieren

$$\bar{u} : 3I := (-T, 2T) \to X,\ t \mapsto \begin{cases} u(-t), & t \in (-T, 0), \\ u(t), & t \in [0, T], \\ u(2T - t), & t \in (T, 2T). \end{cases}$$

Dann gilt:

1. *Es ist $\bar{u} \in L^1(3I, X)$.*

2. Für $u \in L^p(I, X)$ mit $1 \le p \le \infty$ gilt auch $\bar{u} \in L^p(3I, X)$.

3. Für $\frac{du}{dt} \in L^p(I, Y)$ mit $1 \le p \le \infty$ gilt auch $\frac{d\bar{u}}{dt} \in L^p(3I, Y)$, wobei

$$\frac{d\bar{u}}{dt}(t) = \begin{cases} -\frac{du}{dt}(-t), & t \in (-T, 0), \\ \frac{du}{dt}(t), & t \in [0, T], \\ -\frac{du}{dt}(2T - t), & t \in (T, 2T). \end{cases}$$

Beweis. Blatt 10, Aufgabe 2.
Bochner-Messbarkeit sowie L^p-Integrierbarkeit der Fortsetzung $\bar{u}$ sind klar, sodass nur die 3. Aussage zu zeigen bleibt.
Aufgrund der Einbettung $X \subset Y$ gilt $u \in L^1(I, X) \hookrightarrow L^1(I, Y)$ und $\frac{du}{dt} \in L^1(I, Y)$, das heisst insgesamt gilt $u \in W^{1,1}(I, Y)$. Wegen Lemma 5.12 existiert eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\bar{I}, Y)$ mit $\lim_{n \to \infty} u_n = u$ in $W^{1,1}(I, Y)$ und wegen $W^{1,1}(I, Y) \hookrightarrow C^0(I, Y)$ gilt auch $\lim_{n \to \infty} u_n = u$ in $C^0(I, Y)$.
Sei nun $\varphi \in \mathcal{D}(3I)$ beliebig. Dann gilt wegen des Hauptsatzes

$$\int_{-T}^{0} u_n(-t) \partial_t \varphi(t) \, \mathrm{d}t = u_n(0)\varphi(0) + \int_{-T}^{0} (u_n)_t(-t)\varphi(t) \, \mathrm{d}t$$

und analog

$$\int_{0}^{T} u_n(t) \partial_t \varphi(t) \, \mathrm{d}t = u_n(T)\varphi(T) - u_n(0)\varphi(0) - \int_{0}^{T} (u_n)_t(t)\varphi(t) \, \mathrm{d}t,$$
$$\int_{T}^{2T} u_n(2T - t) \partial_t \varphi(t) \, \mathrm{d}t = -u_n(T)\varphi(T) + \int_{T}^{2T} (u_n)_t(2T - t)\varphi(t) \, \mathrm{d}t.$$

Addition der drei Gleichungen und der anschließende Grenzübergang $n \to \infty$ liefern dann die Behauptung. $\square$

Kombiniert man die Spiegelung aus dem vorangegangenen Theorem noch mit einer zusätzlichen Lokalisierung in der Zeit mit Hilfe einer Abschneidefunktion, so erhält man einen linearen, stetigen Fortsetzungsoperator

$$E : W^{1,p}(I, Y) \to W^{1,p}(\mathbb{R}, Y)$$

mit $Eu_{|I} = u$. Für unsere Belange ist Theorem 5.13 allerdings ausreichend. Wir vereinbaren trotzdem noch die folgende Schreibweise: Ist $v : I \subset \mathbb{R} \to X$ eine Banachraum-wertige Funktion, so bezeichne $K(v) : \mathbb{R} \to X$ ihre triviale Fortsetzung durch Null auf ganz $\mathbb{R}$.
Wir kommen nun zu einem zentralen Dichtheitsresultat, das wie im klassischen Fall im Wesentlichen die Faltung benutzt, um eine konkrete Funktion mittels glatter Funktionen zu approximieren.

Theorem 5.14 (Dichtheit glatter Funktionen)
Sei $I = (0,T)$ und $w \in C_0^\infty((-1,1))$ mit $\int_{\mathbb{R}} w(s)\,\mathrm{d}s = 1$. Für

$$w_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon} w\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

gilt dann $w_\varepsilon \in C_0^\infty((-1,1))$, $\operatorname{supp} w_\varepsilon \subset (-\varepsilon,\varepsilon)$ und $\int_{\mathbb{R}} w_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s = 1$. Für $u \in L^1(I,X)$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$u_\varepsilon := (K(\bar{u}) * w_\varepsilon)_{|I},$$

wobei $\bar{u}$ wie in Theorem 5.13 die Fortsetzung von u auf $3I$ mittels Spiegelung bezeichne. Dann gilt:

1. *Für $u \in L^p(I,X)$, $1 \le p < \infty$, gilt $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset C^\infty(I,X)$ und $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon = u$ in $L^p(I,X)$.*

2. *Für $u \in L^p(I,X)$, $1 \le p \le \infty$, mit $\frac{du}{dt} \in L^q(I,Y)$, $1 \le q < \infty$, gilt $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset C^\infty(\bar{I},X)$,*

$$(u_\varepsilon)_t = \frac{du_\varepsilon}{dt} = \left(K\left(\frac{d\bar{u}}{dt}\right) * w_\varepsilon\right)_{|I} \quad \text{in } \mathcal{D}'(I,Y)$$

   und $\lim_{\varepsilon\to 0}(u_\varepsilon)_t = \frac{du}{dt}$ in $L^q(I,Y)$.

Beweis. Die Glattheit der Folge $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sowie die Tatsache, dass $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ stark gegen u in $L^p(I,X)$ konvergiert, folgen wie im klassischen Fall aus Standardresultaten über Parameterintegrale und den Eigenschaften der Faltung, sodass wir uns auf die 2. Aussage konzentrieren.
Auch hier sind die Glattheits- und Konvergenzaussagen Konsequenzen der Eigenschaften der Faltung, sodass nur die entscheidende Identität

$$(u_\varepsilon)_t = \frac{du_\varepsilon}{dt} = \left(K\left(\frac{d\bar{u}}{dt}\right) * w_\varepsilon\right)_{|I} \quad \text{in } \mathcal{D}'(I,Y)$$

zu zeigen bleibt. Wir müssen also zeigen, dass die „Ableitung der Faltung“ der „gefalteten Ableitung“ entspricht.
Da u_ε glatt ist, besitzt u_ε eine Ableitung im Sinne vektorwertiger Distributionen, die mit der klassischen Ableitung übereinstimmt, sodass nur

$$(u_\varepsilon)_t = \left(K\left(\frac{d\bar{u}}{dt}\right) * w_\varepsilon\right)_{|I} \quad \text{in } \mathcal{D}'(I,Y)$$

zu zeigen bleibt. Sei dazu $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ beliebig. Dann gilt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\int_0^T u_\varepsilon(t)\partial_t\varphi(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^T\int_{-T}^{2T}\bar{u}(s)w_\varepsilon(t-s)\partial_t\varphi(t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ &= \int_{-T}^{2T}\bar{u}(s)\left(\int_0^T \check{w}_\varepsilon(s-t)\partial_t\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\\ &= \int_{-T}^{2T}\bar{u}(s)\left(\partial_t\varphi * \check{w}_\varepsilon\right)(s)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

wobei wir $\check{w}_\varepsilon(\cdot) := w_\varepsilon(-\cdot)$ setzen. Wegen $(\varphi * \check{w}_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset C^\infty(\mathbb{R})$, $\partial_t\varphi * \check{w}_\varepsilon = \partial_t(\varphi * \check{w}_\varepsilon)$ und $\operatorname{supp}(\varphi * \check{w}_\varepsilon) \subset \operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp}\check{w}_\varepsilon \subset\subset (-T, 2T)$ folgt

$$\begin{aligned}\int_0^T u_\varepsilon(t)\partial_t\varphi(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-T}^{2T}\bar{u}(s)\partial_t(\varphi * \check{w}_\varepsilon)(s)\,\mathrm{d}s\\ &= -\int_{-T}^{2T}\frac{d\bar{u}}{dt}(s)(\varphi * \check{w}_\varepsilon)(s)\,\mathrm{d}s\\ &= -\int_{-T}^{2T}\int_0^T\frac{d\bar{u}}{dt}(s)w_\varepsilon(t-s)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\ &= -\int_0^T\varphi(t)\left(\int_{\mathbb{R}}K\left(\frac{d\bar{u}}{dt}\right)(s)w_\varepsilon(t-s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\\ &= -\int_0^T\left(K\left(\frac{d\bar{u}}{dt}\right) * w_\varepsilon\right)(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

was zu zeigen war. $\square$

5.4 Partielle Integration

Das Dichtheitsresultat aus Theorem 5.14 dient im Folgenden als Grundlage für den Beweis einer Formel zur partiellen Integration für Funktionen im verallgemeinerten Sobolevraum $W^{1,p,p'}(I, V, V^*)$, wobei (V, H, V^*) ein gegebenes Gelfand-Tripel ist. Der Beweis dieser Formel liefert außerdem die Einbettung $W^{1,p,p'}(I, V, V^*) \hookrightarrow C(\bar{I}, H)$, die die schon bekannte Aussage $W^{1,p,p'}(I, V, V^*) \hookrightarrow C(I, V^*)$ verbessert.
Die partielle Integrationsformel sowie die eben erwähnte Einbettung sind außerdem von fundamentaler Bedeutung für die Existenztheorie (nicht)linearer Evolutionsgleichungen mittels der Theorie monotoner Operatoren, wie sie in [Růž04] dargestellt ist. Darüber hinaus ist sie die natürliche Verallgemeinerung der klassischen Regel

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = uv\Big|_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

auf das Setting Banachraum-wertiger Funktionen.

Theorem 5.15 (partielle Integration und Einbettung)
Sei $I = (0, T)$, $1 < p < \infty$ und (V, H, V^*) ein Gelfand-Tripel. Dann gelten die stetigen Einbettungen

$$C^\infty(\bar{I}, V) \hookrightarrow W^{1,p,p'}(I, V, V^*) \hookrightarrow C(\bar{I}, H),$$

wobei die Einbettung $C^\infty(\bar{I}, V) \hookrightarrow W^{1,p,p'}(I, V, V^*)$ dicht ist.
*Für alle $u, v \in W^{1,p,p'}(I, V, V^*)$ und $s, s' \in \bar{I}$ gilt die **partielle Integrationsformel***

$$\int_{s'}^{s} \langle d_t v(t), u(t) \rangle_V \,\mathrm{d}t = (v(s), u(s))_H - \big(v(s'), u(s')\big)_H - \int_{s'}^{s} \langle d_t u(t), v(t) \rangle_V \,\mathrm{d}t.$$

Für $u = v$ folgt

$$\int_{s'}^{s} \langle d_t u(t), u(t) \rangle_V \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \|u(s)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u(s')\|_H^2 .$$

Beweis. Die Dichtheit der Einbettung $C^\infty(\bar{I}, V) \hookrightarrow W^{1,p,p'}(I, V, V^*)$ folgt mit Theorem 5.14. Bevor wir die stetige Einbettung

$$W^{1,p,p'}(I, V, V^*) \hookrightarrow C(\bar{I}, H)$$

beweisen, sei noch einmal daran erinnert, dass wir aus den Einbettungssätzen in Räume Hölder-stetiger Funktionen (s. Theorem 5.7) bereits wissen, dass

$$W^{1,p,p'}(I, V, V^*) \hookrightarrow C(\bar{I}, V^*)$$

gilt. Der entscheidende Punkt besteht also in der Tatsache, dass Funktionen im verallgemeinerten Sobolevraum $W^{1,p,p'}(I, V, V^*)$ sogar stetig als Funktionen mit Werten in dem kleineren Raum $H \hookrightarrow V^*$ sind.
Wir approximieren zunächst eine beliebige Funktion $u \in W^{1,p,p'}(I, V, V^*)$ durch eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\bar{I}, V)$ und zeigen, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann auch eine Cauchyfolge im Banachraum $C(\bar{I}, H)$ ist. Aus der starken Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ in } L^p(I, V)$$

folgt für fast alle $t \in I$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \text{ in } V \hookrightarrow H$$

(zunächst nur für eine Teilfolge, aber wir können ohne Einschränkung annehmen, dass dies auch für die ganze Folge gilt). Wegen der Eindeutigkeit starker Grenzwerte muss dann u aber identisch mit dem Grenzwert der Cauchyfolge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(\bar{I}, H)$ sein und wir können u schließlich mit diesem Grenzwert identifizieren.

Da $u_n - u_k$ glatt ist, gilt für beliebige $s, s' \in \bar{I}$ auf Grund des Satzes 4.20 über Gelfand-Tripel und der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|(u_n-u_k)(s)\right\|_H^2 - \frac{1}{2}\left\|(u_n-u_k)(s')\right\|_H^2 &= \int_{s'}^{s} ((u_n-u_k)_t(t),(u_n-u_k)(t))_H \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{s'}^{s} \langle (u_n-u_k)_t(t),(u_n-u_k)(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t \\ &\le \left\|(u_n-u_k)_t\right\|_{L^{p'}(I,V^*)} \left\|u_n-u_k\right\|_{L^p(I,V)} .\end{aligned}$$

Daher folgt

$$\left\|(u_n-u_k)(s)\right\|_H^2 \le \left\|(u_n-u_k)(s')\right\|_H^2 + 2\left\|u_n-u_k\right\|_{W^{1,p,p'}(I,V,V^*)}^2$$

und mit der elementaren Ungleichung $\sqrt{a^2+b^2} \le a+b$, $a, b \ge 0$,

$$\left\|(u_n-u_k)(s)\right\|_H \le \left\|(u_n-u_k)(s')\right\|_H + \sqrt{2}\left\|u_n-u_k\right\|_{W^{1,p,p'}(I,V,V^*)} .$$

Unter Beachtung der Einbettungen $V \hookrightarrow H$ und $L^p(I,V) \hookrightarrow L^1(I,H)$ zeigt Integration bezüglich s' schließlich

$$\begin{aligned}\left\|(u_n-u_k)(s)\right\|_H &\le \frac{1}{|I|}\left\|u_n-u_k\right\|_{L^1(I,H)} + \sqrt{2}\left\|u_n-u_k\right\|_{W^{1,p,p'}(I,V,V^*)} \\ &\le c\left\|u_n-u_k\right\|_{L^p(I,V)} + c\left\|u_n-u_k\right\|_{W^{1,p,p'}(I,V,V^*)} \\ &\le C\left\|u_n-u_k\right\|_{W^{1,p,p'}(I,V,V^*)} ,\end{aligned}$$

wobei die Konstante C von $|I|, p$ und p', nicht aber von n und k abhängt. Da $s \in \bar{I}$ beliebig war, folgt

$$\left\|u_n-u_k\right\|_{C(\bar{I},H)} = \sup_{s\in\bar{I}} \left\|(u_n-u_k)(s)\right\|_H \le C\,\left\|u_n-u_k\right\|_{W^{1,p,p'}(I,V,V^*)} .$$

Nach Voraussetzung gilt $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ in $W^{1,p,p'}(I,V,V^*)$. Somit liefert die letzte Abschätzung die Tatsache, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im Banachraum $C(\bar{I},H)$ ist. Dank unserer Vorüberlegung folgt daher einerseits

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ in } L^p(I,V) \text{ und in } C(\bar{I},H).$$

Andererseits liefert der Grenzübergang $n \to \infty$ in der Ungleichung

$$\left\|u_n\right\|_{C(\bar{I},H)} \le C\,\left\|u_n\right\|_{W^{1,p,p'}(I,V,V^*)}$$

schlussendlich die stetige Einbettung

$$W^{1,p,p'}(I,V,V^*) \hookrightarrow C(\bar{I},H).$$

Die partielle Integrationsformel folgt nun ebenfalls mittels Approximation. Zu $u, v \in W^{1,p,p'}(I, V, V^*)$ wählen wir Approximationsfolgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\bar{I}, V)$, die stark in $W^{1,p,p'}(I, V, V^*)$, und wegen $W^{1,p,p'}(I, V, V^*) \hookrightarrow C(\bar{I}, H)$, insbesondere auch gleichmäßig auf $\bar{I}$ in H gegen u bzw. v, konvergieren. Da u_n und v_n glatt sind gilt dann für beliebige $s, s' \in \bar{I}$

$$\begin{aligned}
(v_n(s), u_n(s))_H - \big(v_n(s'), u_n(s')\big)_H \\
&= \int_{s'}^{s} ((v_n)_t(t), u_n(t))_H \,\mathrm{d}t + \int_{s'}^{s} ((u_n)_t(t), v_n(t))_H \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{s'}^{s} \langle (v_n)_t(t), u_n(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t + \int_{s'}^{s} \langle (u_n)_t(t), v_n(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t \\
&= \big\langle (v_n)_t, u_n\chi_{(s',s)}\big\rangle_{L^p(I,V)} + \big\langle (u_n)_t, v_n\chi_{(s',s)}\big\rangle_{L^p(I,V)} .
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Wegen der Konvergenzen

$$\begin{aligned}
(v_n)_t &\to d_t v \text{ in } L^{p'}(I, V^*), \\
(u_n)_t &\to d_t u \text{ in } L^{p'}(I, V^*), \\
v_n &\to v \text{ in } L^p(I, V), \\
u_n &\to u \text{ in } L^p(I, V), \\
v_n &\to v \text{ in } C(\bar{I}, H) \text{ und} \\
u_n &\to u \text{ in } C(\bar{I}, H)
\end{aligned}$$

liefert der Grenzübergang $n \to \infty$ in (5.16) die partielle Integrationsformel. Eine analoge Argumentation zeigt schließlich

$$\frac{1}{2}\|u(s)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u(s')\|_H^2 = \int_{s'}^{s} \langle d_t u(t), u(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t$$

für beliebiges $u \in W^{1,p,p'}(I, V, V^*)$ und beliebige $s, s' \in \bar{I}$. □

Bemerkung 5.17

Der Beweis zeigt, dass die Struktur eines zugrunde liegenden Gelfand-Tripels (V, H, V^*) von entscheidender Bedeutung im Beweis ist. Insbesondere die Tatsache, dass für $u, v \in V$ die Identität

$$\langle u, v\rangle_V = (u, v)_H = (v, u)_H = \langle v, u\rangle_V$$

gilt, erlaubt es uns, von V^* nach H zu gelangen und damit die Einbettung zu verbessern. Für den Beweis ist ebenso entscheidend, dass $C^\infty(\bar{I}, V)$ dicht in $W^{1,p,p'}(I, V, V^*)$ liegt, da sich dann die Integrationsformeln leicht durch Approximation beweisen lassen.

Abhängig von der Struktur des vorliegenden Problems und vor allem der auftretenden Funktionenräume kann die Konstruktion dichter Teilmengen schwierig sein.
Hier kann aber die Beobachtung nützlich sein, dass der Beweis von Theorem 5.15 auch dann noch funktioniert, wenn die Approximationsfolge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\bar{I}, V)$ derart konstruiert werden kann, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark gegen u in $L^p(I, V))$ aber $(u_n)_t$ nur schwach gegen $d_t u$ in $(L^p(I, V))^* \cong L^{p'}(I, V^*)$ konvergiert.

Die partielle Integrationsformel lässt sich noch weiter verallgemeinern, wenn man die Skalar- und Dualitätsprodukte aus Theorem 5.15 durch allgemeinere stetige Bilinearformen ersetzt. Der Beweis der folgenden Proposition beruht wieder im Wesentlichen auf der Dichtheit glatter Funktionen in den entsprechenden verallgemeinerten Sobolevräumen. Daher verzichten wir an dieser Stelle auf die Details des Beweises.

Proposition 5.18 (partielle Integration für stetige Bilinearformen)
Seien X, Y und Z Banachräume. Seien $1 \leq p, q < \infty$ und $1 \leq r \leq \infty$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ gilt. Sei außerdem $B : X \times Y \to Z$ eine stetige Bilinearform. Dann gilt:

1. *B induziert eine stetige Bilinearform*

$$\begin{aligned} B : W^{1,p}(I, X) \times W^{1,q}(I, Y) &\to W^{1,r}(I, Z), \\ B(u, v)(t) &:= B(u(t), v(t)). \end{aligned}$$

Dabei gilt für die distributionelle Zeitableitung der Verkettung die Identität

$$\frac{d}{dt} B(u(\cdot), v(\cdot)) = B\left(\frac{du}{dt}(\cdot), v(\cdot)\right) + B\left(u(\cdot), \frac{dv}{dt}(\cdot)\right).$$

2. *Für alle $u, v \in W^{1,p}(I, X) \times W^{1,q}(I, Y)$ und $s, s' \in \bar{I}$ gilt die partielle Integrationsformel*

$$\int_{s'}^{s} B\left(u(t), \frac{dv}{dt}(t)\right) \mathrm{d}t = B(u(s), v(s)) - B(u(s'), v(s')) - \int_{s'}^{s} B\left(\frac{du}{dt}(t), v(t)\right) \mathrm{d}t.$$

Beweis. Blatt 11, Aufgabe 1 $\square$

6 Kompaktheit

Kompaktheitsmethoden sind von zentraler Bedeutung in der Existenztheorie nichtlinearer partieller Differentialgleichungen. Die Begründung dafür beruht auf einer einfachen Beobachtung, die allerdings weitreichende Konsequenzen für die Approximation nichtlinearer Probleme hat: Ist $f \in X^*$ ein lineares Funktional und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge, so konvergiert $\langle f, u_n\rangle$ gegen $\langle f, u\rangle$, falls $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mindestens schwach gegen $u \in X$ konvergiert. Ist allerdings $F : X \to \mathbb{R}$ nur stetig und nicht unbedingt linear, so benötigt man starke Konvergenz der Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, um auf die Konvergenz von $(F(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ zu schließen.
Als einfaches Beispiel reicht es, die Folge $u_n(x) := \sin(nx)$ zu betrachten, die schwach gegen 0 in L^2 konvergiert, aber nicht stark in L^2 konvergiert. Für $F(u) := u^2$ heißt das dann, dass $(F(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert.
Die Existenz schwach konvergenter Teilfolgen bzw. die schwache Folgenkompaktheit haben wir im Kapitel über Reflexivität eingehend untersucht. Im vorliegenden Kapitel geht es nun um die Charakterisierung relativ kompakter Teilmengen von Bochnerräumen.
Das zentrale Resultat ist hierbei der Satz von Aubin-Lions, der einen der Eckpfeiler in der Existenztheorie nichtlinearer Evolutionsgleichungen darstellt.
Bevor wir zu den ersten vorbereitenden Hilfsmitteln kommen, stellen wir noch eine weitere Vorüberlegung an, die die zentrale Schwierigkeit im Zusammenhang mit Kompaktheitsfragen in Bochnerräumen genauer beleuchtet.
Sei dazu X ein Banachraum und $u \in X$ fest. Weiter sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(I)$ eine Folge, die schwach aber nicht stark gegen $\alpha \in L^p(I)$ konvergiert. Wir nehmen außerdem an, dass X kompakt in einen Banachraum Y einbettet. Die Folge $\alpha_n u : I \to X$ liegt dann in $L^p(I, X)$ und man könnte vermuten, dass die Einbettung $L^p(I, X) \to L^p(I, Y)$ kompakt ist, das heisst, dass eine Teilfolge der in $L^p(I, X)$ beschränkten Folge $(\alpha_n u)_{n\in\mathbb{N}}$ stark in $L^p(I, Y)$ konvergiert. Wie man allerdings leicht sieht, gilt

$$\|\alpha_n u - \alpha u\|_{L^p(I,Y)} = \|u\|_Y \|\alpha_n - \alpha\|_{L^p(I)} \leq c\,\|u\|_X \|\alpha_n - \alpha\|_{L^p(I)},$$

sodass $(\alpha_n u)_{n\in\mathbb{N}}$ nur dann stark gegen αu in $L^p(I, Y)$ konvergiert, wenn α_n stark gegen α in $L^p(I)$ konvergiert.
Man sieht an diesem Beispiel, dass Kompaktheit im Zielraum (bzw. „Kompaktheit im Ort“) alleine nicht ausreicht, um Kompaktheit der Einbettung $L^p(I, X) \hookrightarrow L^p(I, Y)$ zu implizieren. Vielmehr braucht man zusätzlich auch Kompaktheit in der Zeit, wie das Beispiel gerade gezeigt hat. Der Satz von Aubin-Lions kombiniert geschickt Kompaktheit im Zielraum mit einem Argument, welches letztlich auf dem Satz von Arzelà-Ascoli

beruht, um Kompaktheit in der Zeit zu erzwingen.

6.1 Das Ehrling-Lemma und der Satz von Arzelà-Ascoli

Das erste Hilfsmittel für das Lemma von Aubin-Lions ist ein Interpolationsresultat, welches auch als Ehrling-Lemma bekannt ist.

Lemma 6.1 (Ehrling)
*Seien B_0, B und B_1 Banachräume. Die Einbettung $B_0 \hookrightarrow B$ sei **kompakt** und die Einbettung $B \hookrightarrow B_1$ sei **injektiv**, das heisst es gelte*

$$B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B \overset{inj.}{\hookrightarrow} B_1.$$

Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C(\varepsilon)$, sodass für alle $u \in B_0$ die Abschätzung

$$\|u\|_B \leq \varepsilon \|u\|_{B_0} + C(\varepsilon) \|u\|_{B_1} . \tag{6.2}$$

gilt.

Beweis. Wäre (6.2) falsch, so würde ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Folge $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_0$ existieren mit

$$\|\tilde{u}_n\|_B > \varepsilon_0 \|\tilde{u}_n\|_{B_0} + n \|\tilde{u}_n\|_{B_1} .$$

Setzen wir $u_n := \tilde{u}_n \|\tilde{u}_n\|_{B_0}^{-1}$, so gilt für die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_0$ die Abschätzung

$$\|u_n\|_B > \varepsilon_0 \|u_n\|_{B_0} + n \|u_n\|_{B_1} = \varepsilon_0 + n \|u_n\|_{B_1} . \tag{6.3}$$

Wegen $B_0 \hookrightarrow B$ ist für alle n

$$\|u_n\|_B = \frac{\|\tilde{u}_n\|_B}{\|\tilde{u}_n\|_{B_0}} \leq c \frac{\|\tilde{u}_n\|_{B_0}}{\|\tilde{u}_n\|_{B_0}} = c$$

und insbesondere folgt aus (6.3)

$$\|u_n\|_{B_1} < \frac{c}{n} \longrightarrow 0,$$

also $u_n \to 0$ in B_1 für $n \to \infty$.
Die Kompaktheit der Einbettung $B_0 \hookrightarrow B$ und die Beschränktheit der Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_0$ liefern andererseits die Existenz einer Teilfolge mit $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to u$ in B für ein $u \in B$ und $k \to \infty$. Die stetige Einbettung $B \hookrightarrow B_1$ impliziert dann $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = u$ in B_1 und die Injektivität der Einbettung $B \hookrightarrow B_1$ liefert schließlich $u = 0$.
Wir haben also $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = 0$ in B und somit gilt für hinreichend großes $n_k \in \mathbb{N}$ mit (6.3)

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \geq \|u_{n_k}\|_B > \varepsilon_0 + n_k \|u_{n_k}\|_{B_1} \geq \varepsilon_0.$$

Dieser Widerspruch liefert nun die Gültigkeit der Abschätzung (6.2). □

Bemerkung 6.4
Die geforderte Injektivität der Einbettung $B \hookrightarrow B_1$ ist notwendig, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt:
Sei $I = [-2, 2]$ und $J = [-1, 1]$. Der Satz von Arzelà-Ascoli garantiert dann die Kompaktheit der Einbettung $C^1(I) \hookrightarrow C^0(I)$. Die Einbettung $C^0(I) \hookrightarrow L^2(J)$ ist zwar stetig, aber nicht injektiv. Würde das Ehrling-Lemma für diese Konstellation dennoch gelten, so fänden wir für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C(\varepsilon)$, sodass für alle $u \in C^1(I)$ gilt

$$\|u\|_{C^0(I)} \leq \varepsilon \|u\|_{C^1(I)} + C(\varepsilon) \|u\|_{L^2(J)} .$$

Für alle $u \in C^1(I)$ mit $\operatorname{supp} u \cap J = \emptyset$ und alle $\varepsilon > 0$ würde dann aber

$$\|u\|_{C^0(I)} \leq \varepsilon \|u\|_{C^1(I)}$$

gelten, was für $u \neq 0$ zum Widerspruch führt.

Bemerkung 6.5
In der Literatur wird die Injektivität der Einbettung $B \hookrightarrow B_1$ nur selten explizit gefordert. Das kann zwar daran liegen, dass in den entsprechenden Quellen Einbettungen ohnehin als injektiv vorausgesetzt werden, dennoch sollte man sich vergewissern, dass diese zunächst unscheinbare Bedingung wirklich erfüllt ist.

Wie bereits erwähnt geht im Beweis des Satzes von Aubin-Lions der Satz von Arzelà-Ascoli ein. Wir zitieren daher ohne Beweis eine allgemeine Version des Satzes von Arzelà-Ascoli.

Theorem 6.6 (Arzelà-Ascoli)
Sei X ein Banachraum, K ein kompakter metrischer Raum und $M \subset C^0(K, X)$. Dann ist M genau dann relativ kompakt, das heisst $\overline{M}$ ist kompakt, wenn gilt:

1. *M ist **gleichgradig stetig:** das heisst für alle $t \in K$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung U von t, sodass für alle $s \in U$ und alle $u \in M$ die Abschätzung $\|u(s) - u(t)\|_X \leq \varepsilon$ gilt.*

2. *Die Menge $M(t) := \{u(t) \mid u \in M\}$ ist relativ kompakt in X für jedes $t \in K$.*

Ist X endlich dimensional, so ist M genau dann relativ kompakt, wenn M gleichgradig stetig und beschränkt ist.

Die im Satz von Arzelà-Ascoli geforderte gleichgradige Stetigkeit einer Familie M erzwingt man am einfachsten, indem man **gleichmäßige Kontrolle über die Zeitableitungen** voraussetzt. In der Tat gilt ja Dank des Hauptsatzes die Identität

$$u(s) - u(s') = \int_{s'}^{s} \frac{du}{dt}(t) \, \mathrm{d}t.$$

Sind nun die Zeitableitungen $\left(\frac{du}{dt}\right)_{u\in M}$ gleichmäßig in $L^p(I,X)$ beschränkt, folgt

$$\left\|u(s)-u(s')\right\|_X \le |s-s'|^{\frac{1}{p'}} \sup_{u\in M}\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L^p(I,X)} \le c\,|s-s'|^{\frac{1}{p'}}$$

und M ist somit gleichgradig stetig.

6.2 Das Kompaktheitslemma von Aubin-Lions

Der Satz von Arzelà-Ascoli liefert den noch fehlenden Baustein für den Satz von Aubin-Lions. Der Beweis folgt der Darstellung von [BF13], die sich wiederum an der Methode von Simon orientiert, der in [Sim87] eine ganze Reihe von Kompaktheitssätzen à la Aubin-Lions bewiesen hat. Die Tatsache, dass [Sim87] zu den meist zitierten Arbeiten gehört, unterstreicht noch einmal die Relevanz von Kompaktheitssätzen für die Theorie aber auch für die theoretische Numerik im Kontext nichtlinearer Evolutionsgleichungen.

Theorem 6.7 (Aubin-Lions, Simon)
Seien B_0, B und B_1 Banachräume, die die Voraussetzungen des Ehrling-Lemmas 6.1 erfüllen. Sei außerdem $1 \le p < \infty$ und $1 \le r \le \infty$. Dann ist die Einbettung

$$W^{1,p,r}(I,B_0,B_1) \hookrightarrow L^p(I,B)$$

kompakt.

Beweis. Der Beweis besteht aus drei Schritten. Im ersten Schritt wird die Behauptung mit Hilfe des Ehrling-Lemmas auf Kompaktheit in $L^p(I,B_1)$ reduziert. Diese Kompaktheit wird im zweiten Schritt mit Hilfe des Satzes von Arzelà-Ascoli bewiesen. Der dritte Schritt besteht aus einem Diagonalfolgenargument.
Zu zeigen ist: Jede beschränkte Folge

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p,r}(I,B_0,B_1)$$

enthält eine in $L^p(I,B)$ starkt konvergente Teilfolge, bzw. (was äquivalent dazu ist) eine $L^p(I,B)$-Cauchyfolge. Wir können dazu ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r=1$ annehmen.

Schritt 1: Reduktion per Ehrling-Lemma
Wegen des Ehrling-Lemmas existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C(\varepsilon)$, sodass für alle $u_n(t), u_k(t) \in B_0$ gilt

$$\|u_n(t)-u_k(t)\|_B \le \varepsilon\,\|u_n(t)-u_k(t)\|_{B_0} + C(\varepsilon)\,\|u_n(t)-u_k(t)\|_{B_1}.$$

Nehmen wir die p-te Potenz dieser Ungleichung und integrieren bzgl. t über I, so folgt mit einer von p abhängigen Konstante c

$$\|u_n - u_k\|_{L^p(I,B)}^p \le c\,\varepsilon \, \|u_n - u_k\|_{L^p(I,B_0)}^p + c\,C(\varepsilon)\, \|u_n - u_k\|_{L^p(I,B_1)}^p .$$

Ist nun $(u_n) \subset W^{1,p,r}(I, B_0, B_1)$ durch eine Konstante K beschränkt, so gilt

$$\|u_n - u_k\|_{L^p(I,B)}^p \le c\,\varepsilon (2K)^p + c\,C(\varepsilon)\, \|u_n - u_k\|_{L^p(I,B_1)}^p .$$

Es reicht also, eine $L^p(I, B_1)$-Cauchyfolge zu extrahieren, denn diese Cauchyfolge ist automatisch auch eine $L^p(I, B)$-Cauchyfolge, da $\varepsilon > 0$ beliebig war.

Schritt 2: Arzelà-Ascoli Argument

Sei ohne Einschränkung $I = [0, T]$. Sei weiter $\kappa \in C^\infty(\bar{I}, \mathbb{R})$ eine feste Abschneidefunktion mit $\kappa(T) = 0$. Es gilt

$$u_n = \kappa u_n + (1 - \kappa)\, u_n =: v_n + w_n.$$

Wir zeigen, dass die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $L^p(I, B_1)$-Cauchyfolge enthält. Die Argumentation für w_n verläuft analog.

Setzen wir $v_n(t) := 0$ für alle $t > T$, so folgt $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{R}_+, B_0)$ und für $h > 0$ gilt

$$v_n(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v_n(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v_n(t) - v_n(s)\,\mathrm{d}s =: a_{n,h}(t) + b_{n,h}(t).$$

Wir zeigen nun, dass die Folge $(a_{n,h})_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0(\mathbb{R}_+, B_0)$ für festes $h > 0$ die Voraussetzungen des Satzes von Arzelà-Ascoli erfüllt.

Zunächst zeigen wir dafür, dass $\{a_{n,h}(t) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ relativ kompakt in B_1 liegt. Wegen $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{R}_+, B_0)$ ist die Folge $(a_{n,h})_{n\in\mathbb{N}}$ B_0-wertig. Aufgrund der Beschränktheit von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p,r}(I, B_0, B_1)$ gilt für jedes $t \in \mathbb{R}_+$

$$\|a_{n,h}(t)\|_{B_0} \le \frac{1}{h}\, h^{\frac{1}{p'}}\, \|v_n\|_{L^p(I,B_0)} \le h^{\frac{1}{p'}-1}\, \|\kappa\|_{C^0(\bar{I})}\, \|u_n\|_{L^p(I,B_0)} \le h^{\frac{1}{p'}-1} K\, \|\kappa\|_{C^0(\bar{I})} .$$

Für festes $h > 0$ liegt die Menge $\{a_{n,h}(t) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ somit in einer beschränkten Teilmenge von B_0 und wegen $B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ in einer relativ kompakten Teilmenge von B_1.

Die gleichgradige Stetigkeit der Menge $\{a_{n,h} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Dieser liefert

$$\frac{da_{n,h}}{dt}(t) = \frac{1}{h}\, (v_n(t + h) - v_n(t)) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \frac{dv_n}{dt}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Daraus folgt wegen der Beschränktheit von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p,r}(I, B_0, B_1)$

$$\left\|\frac{da_{n,h}}{dt}(t)\right\|_{B_1} \le \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left\|\frac{dv_n}{dt}(s)\right\|_{B_1} \mathrm{d}s \le \frac{1}{h} \left\|\frac{dv_n}{dt}\right\|_{L^1(I,B_1)} \le \frac{1}{h} c$$

und somit

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \frac{da_{n,h}}{dt} \right\|_{L^p(I,B_1)} \leq \frac{1}{h} c,$$

was für festes $h > 0$ die gleichgradige Stetigkeit liefert.
Nach Arzelà-Ascoli enthält $(a_{n,h})_{n\in\mathbb{N}}$ somit eine $C^0(\bar{I}, B_1)$-Cauchyfolge. Wegen der Einbettung $C^0(\bar{I}, B_1) \hookrightarrow L^p(I, B_1)$ und dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz ist diese Cauchyfolge auch eine $L^p(I, B_1)$-Cauchyfolge.
Nun zeigen wir, dass

$$\|b_{n,h}\|_{L^p(I,B_1)} \leq c h^{\frac{1}{p}}$$

gilt. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert

$$\|b_{n,h}(t)\|_{B_1} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|v_n(t) - v_n(s)\|_{B_1} \,\mathrm{d}s \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \int_t^s \left\| \frac{dv_n}{dt}(\tau) \right\|_{B_1} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}s.$$

Wir können weiter abschätzen:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|b_{n,h}(t)\|_{B_1}^p \,\mathrm{d}t &\overset{(1)}{\leq} \int_0^T \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left(\int_t^s \left\| \frac{dv_n}{dt}(\tau) \right\|_{B_1} \mathrm{d}\tau \right)^p \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&\overset{(2)}{\leq} \left\| \frac{dv_n}{dt} \right\|_{L^1(I,B_1)}^{p-1} \int_0^T \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \int_t^s \left\| \frac{dv_n}{dt}(\tau) \right\|_{B_1} \mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&\overset{(3)}{=} \left\| \frac{dv_n}{dt} \right\|_{L^1(I,B_1)}^{p-1} \int_0^T \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left\| \frac{dv_n}{dt}(\tau) \right\|_{B_1} (t + h - \tau) \,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \\
&\overset{(4)}{\leq} \left\| \frac{dv_n}{dt} \right\|_{L^1(I,B_1)}^{p-1} \int_0^T \int_t^{t+h} \left\| \frac{dv_n}{dt}(\tau) \right\|_{B_1} \mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \\
&\overset{(5)}{\leq} h \left\| \frac{dv_n}{dt} \right\|_{L^1(I,B_1)}^p \\
&\leq ch.
\end{aligned}$$

Dabei verwenden wir in (1) die obige Abschätzung für $\|b_{n,h}(t)\|_{B_1}$ und die Jensensche Ungleichung. In (2) verwenden wir die aus der Hölder-Ungleichung folgende Abschätzung

$$\left(\int \eta f \,\mathrm{d}\tau \right)^p = \left(\int \eta^{1/p'} \cdot \eta^{1/p} f \,\mathrm{d}\tau \right)^p \leq \|\eta\|_{L^1}^{p-1} \int |\eta| \cdot |f|^p \,\mathrm{d}\tau$$

mit $\eta := \left\| \frac{dv_n}{dt}(\tau) \right\|_{B_1}$ und $f := 1$. In (3) verwenden wir

$$\chi_{(t,t+h)}(s) \cdot \chi_{(t,s)}(\tau) = \chi_{(t,t+h)}(\tau) \cdot \chi_{(\tau,t+h)}(s)$$

und Fubini. Für (4) verwenden wir, dass $t + h - \tau \leq h$ ist. Abschließend verwenden wir in (5), dass wir wegen $v_n(\tau) = 0$ für alle $\tau \geq T$ ohne Einschränkung $\tau \leq T$ annehmen können und deshalb

$$\chi_{(0,T)}(t) \cdot \chi_{(t,t+h)}(\tau) \leq \chi_{(0,T)}(\tau) \cdot \chi_{(\tau-h,\tau)}(t)$$

erhalten.
Damit folgt dann die behauptete Abschätzung

$$\|b_{n,h}\|_{L^p(I,B_1)} \leq ch^{\frac{1}{p}}. \tag{6.8}$$

Schritt 3: Diagonalfolgenargument
Mit einem Diagonalfolgenargument wählen wir nun eine Cauchy-Teilfolge von $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus.
Wir setzen $h_k := \frac{1}{k}$. Für $k = 1$ erhalten wir aus den Abschätzungen für $(a_{n,h})_{n\in\mathbb{N},h>0}$, dass $(a_{n,h_1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $L^p(I, B_1)$ konvergente Teilfolge $(a_{\varphi_1(n),h_1})_{n\in\mathbb{N}}$ enthält. Auf dieselbe Weise erhalten wir für $k = 2$ eine konvergente Teilfolge $(a_{\varphi_2\circ\varphi_1(n),h_2})_{n\in\mathbb{N}} \subset (a_{\varphi_1(n),h_2})_{n\in\mathbb{N}}$. Rekursiv erhalten wir so für jedes $k \geq 1$ eine konvergente Teilfolge $(a_{\varphi_k\circ\ldots\circ\varphi_1(n),h_k})_{n\in\mathbb{N}}$.
Wir konstruieren jetzt eine Cauchy-Teilfolge von $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wegen (6.8) existiert ein $k_0 \geq 1$ sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $k \geq k_0$ gilt

$$\|b_{n,h_k}\|_{L^p(I,B_1)} \leq \varepsilon.$$

Wir setzen $\psi(k) := \varphi_k \circ \ldots \circ \varphi_1(k)$ und $v_{\psi(k)} := a_{\psi(k),h_{k_0}} + b_{\psi(k),h_{k_0}}$. Nach Konstruktion ist

$$(a_{\psi(k),h_{k_0}})_{k\geq k_0} \subset (a_{\varphi_{k_0}\circ\ldots\circ\varphi_1(n),h_{k_0}})_{n\in\mathbb{N}},$$

wobei $(a_{\varphi_{k_0}\circ\ldots\circ\varphi_1(n),h_{k_0}})_{n\in\mathbb{N}}$ als konvergente Folge eine $L^p(I, B_1)$-Cauchyfolge ist. Deshalb existiert ein $k_1 \geq k_0$, sodass für alle $k, k' \geq k_1$ gilt

$$\left\| a_{\psi(k),h_{k_0}} - a_{\psi(k'),h_{k_0}} \right\|_{L^p(I,B_1)} \leq \varepsilon.$$

Für alle $k, k' \geq k_1$ gilt dann

$$\begin{aligned} &\left\| v_{\psi(k)} - v_{\psi(k')} \right\|_{L^p(I,B_1)} \\ &\leq \left\| a_{\psi(k),h_{k_0}} - a_{\psi(k'),h_{k_0}} \right\|_{L^p(I,B_1)} + \left\| b_{\psi(k),h_{k_0}} \right\|_{L^p(I,B_1)} + \left\| b_{\psi(k'),h_{k_0}} \right\|_{L^p(I,B_1)} \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Korollar 6.9 (Kompakte Einbettung nach $C(\bar{I}, B)$)
Es gelten die Voraussetzungen von 6.7. Dann gilt für $r > 1$

$$W^{1,\infty,r}(I, B_0, B_1) \hookrightarrow\hookrightarrow C^0(\bar{I}, B).$$

7 Lineare Wärmeleitungsgleichung

Ziel dieses Kapitels ist der Existenzbeweis für die lineare Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \quad \text{in } I \times \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{in } I \times \partial\Omega, \\ u(0) &= u_0 \ \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

mit Hilfe eines Galerkin-Verfahrens, das für eine große Klasse instationärer Probleme verwendet werden kann. Darauf aufbauend wollen wir aber auch ein analoges Existenzresultat für eine nichtlineare Wärmeleitungsgleichung der Form

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f(u) \ \text{in } I \times \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{in } I \times \partial\Omega, \\ u(0) &= u_0 \qquad \text{in } \Omega. \end{aligned} \tag{7.1}$$

beweisen. Hier ist $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die nichtlinear von der (unbekannten) Funktion $u : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ abhängt und gewisse strukturelle Voraussetzungen hinsichtlich ihres Wachstums erfüllt.
Der Existenzsatz für die nichtlineare Wärmeleitungsgleichung wird mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes geführt, auf den wir weiter unten genauer eingehen werden. Die im Schauderschen Fixpunktsatz notwendige Kompaktheit ist eine Folge des Satzes von Aubin-Lions. Diese Art der Kombination von Linearisierungs-, Fixpunkt- und Kompaktheitsmethoden kann ebenfalls auf viele nichtlineare Evolutionsprobleme angewandt und verallgemeinert werden.
Die Existenzsätze und insbesondere die dabei verwendeten Methoden konkretisieren und verdeutlichen die Relevanz der bisher vorgestellten abstrakten Resultate für Anwendungen auf (nichtlineare) partielle Differentialgleichungen.

7.1 Schwache Form der linearen Wärmeleitungsgleichung

Um die lineare Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \quad \text{in } I \times \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{in } I \times \partial\Omega, \\ u(0) &= u_0 \ \text{in } \Omega \end{aligned} \tag{7.2}$$

kompakt in der Form einer Operatordifferentialgleichung zu formulieren, führen wir zunächst die Notation

$$V := W_0^{1,2}(\Omega) \text{ und } H := L^2(\Omega)$$

für die aus der Motivation bekannten kanonischen Funktionenräume ein. Das Tripel (V, H, V^*) ist dann ein Gelfand-Tripel im Sinne von Definition 4.20. Wir hatten uns außerdem schon überlegt, dass eine klassische Lösung von (7.2) zu gegebenen Daten $u_0 \in H$ und $f \in L^2(I, H)$ in natürlicher Weise im Bochnerraum $L^2(I, V) \cap L^\infty(I, H)$ liegt.
In einem ersten Schritt zu einer schwachen Formulierung von (7.8) definieren nun **den vom elliptischen Term $-\Delta u$ induzierten linearen Operator**

$$\begin{aligned} A &: V \to V^*, \\ \langle Au, v\rangle_V &:= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Dann gilt

$$\langle Au, u\rangle_V = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x = \|u\|_V^2 ,$$

wobei im letzten Schritt insbesondere eingeht, dass die Grösse

$$\|u\|_V := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

dank der Poincaré-Ungleichung eine äquivalente Norm auf dem Sobolevraum $V = W_0^{1,2}(\Omega)$ definiert. Der oben definierte Operator $A : V \to V^*$ lässt sich durch die Vorschrift

$$\big(\tilde{A}u\big)(t) := A(u(t))$$

zunächst formal zu einem linearen Operator

$$\tilde{A} : L^2(I, V) \to \big(L^2(I, V)\big)^* \cong L^2(I, V^*),$$

fortsetzen. Der Isomorphismus $L^2(I, V)^* \cong L^2(I, V^*)$ ist im Sinne von Theorem 3.12 aufzufassen. Für den von A in dieser Weise induzierten Operator, den wir im Folgenden wieder mit A bezeichnen, gilt dann

Lemma 7.4
Der Operator

$$A : V \to V^*, \tag{7.5}$$

$$\langle Au, v\rangle_V := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \tag{7.6}$$

ist linear und es gilt

1. $\langle Au, u \rangle_V = \|u\|_V^2$, *was insbesondere die Koerzivität von* $A : V \to V^*$ *liefert.*

2. $\|Au\|_{V^*} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \langle Au, v \rangle_V = \|u\|_V$. *Damit ist* $A : V \to V^*$ *wohldefiniert und stetig.*

Der induzierte Operator

$$\begin{aligned} A : L^2(I, V) &\to L^2(I, V^*), \\ \big(Au\big)(t) &:= A(u(t)) \end{aligned}$$

ist wohldefiniert und linear und es gilt

1. $\langle Au, u \rangle_{L^2(I,V)} = \int_I \langle Au(t), u(t) \rangle_V \,\mathrm{d}t = \|u\|_{L^2(I,V)}^2$.

2. $\|Au\|_{L^2(I,V^*)} = \sup_{\|v\|_{L^2(I,V)} \leq 1} \langle Au, v \rangle_{L^2(I,V)} = \|u\|_{L^2(I,V)}$.

Insbesondere übertragen sich die Stetigkeit und die Koerzivität des Operators $A : V \to V^*$ *auf den induzierten Operator* $A : L^2(I, V) \to L^2(I, V^*)$.

Beweis. Zu zeigen ist lediglich die Wohldefiniertheit des induzierten Operators und dabei nur die Bochner-Messbarkeit der Abbildung

$$\begin{aligned} Au : I &\to V^*, \\ t &\mapsto \big(Au\big)(t) = A(u(t)). \end{aligned}$$

Für $u \in L^2(I, V)$ existiert eine Folge von Treppenfunktionen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} : I \to V$, so dass für fast alle $t \in I$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} s_n(t) = u(t) \text{ in } V.$$

Dann sind aber die Funktionen $(As_n)_{n \in \mathbb{N}} : I \to V^*$ Treppenfunktionen und es gilt wegen der Stetigkeit und Linearität von $A : V \to V^*$ für $n \to \infty$

$$\|As_n(t) - Au(t)\|_{V^*} \leq \|s_n(t) - u(t)\|_V \to 0$$

für fast alle $t \in I$. Daher ist $Au : I \to V^*$, $t \mapsto Au(t)$ Bochner-messbar.
Die restlichen Aussagen folgen direkt mit Hilfe der Hölder-Ungleichung. □

Bereits in der Motivation hatten wir uns klar gemacht, dass schwache Lösungen durch eine geeignete Integralidentität definiert sind. Wir haben nun alle technischen Hilfsmittel zusammen, um diese Indetität anzugeben.

Definition 7.7 (schwache Lösung)
Eine Funktion $u \in L^2(I,V) \cap L^\infty(I,H)$ heißt ***schwache Lösung*** *der linearen Wärmeleitungsgleichung (7.2), falls sowohl die* ***schwache Formulierung***

$$-\int_I (u(t), \eta_t(t))_H \,\mathrm{d}t + \int_I \langle Au(t), \eta(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t = \int_I (f(t), \eta(t))_H \,\mathrm{d}t \tag{7.8}$$

für alle Testfunktionen $\eta \in C^\infty(I,V)$ der Form $\eta = \varphi w$ mit $\varphi \in C_0^\infty(I)$ und $w \in V$, als auch die Anfangsbedingung

$$u(0) = u_0 \text{ in } H,$$

erfüllt sind.

Bemerkung 7.9
Die schwache Formulierung (7.8) lässt sich wegen der Gelfand-Tripel-Struktur der Räume (V,H,V^*) auch schreiben als

$$-\int_I \langle u(t), \eta_t(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t + \int_I \langle Au(t), \eta(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t = \int_I \langle f(t), \eta(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t, \quad \text{für alle } \eta \in C_0^\infty(I,V). \tag{7.10}$$

Man beachte, dass wir hier eine grössere Klasse von Testfunktionen als in Definition 7.8 zulassen. Dieser Schritt lässt sich mit Hilfe von Korollar 2.9 sowie Korollar 2.10 rechtfertigen. Mit Hilfe der Definition der verallgemeinerten Zeitableitung, kann man 7.10 noch kompakter in der Form

$$d_t u(t) + Au(t) = f(t) \text{ in } V^*,\ t \in I, \tag{7.11}$$

schreiben. Diese Schreibweise rechtfertigt mithin die Sprechweise ***Operatordifferentialgleichung.*** *Gilt nun (7.10) für alle $\eta \in C_0^\infty(I,V)$, so folgt mit Hilfe der Dichtheit der Einbettung*

$$C_0^\infty(I,V) \hookrightarrow L^2(I,V)$$

(s. Korollar 2.10) und der Struktur der Gleichung, dass für die verallgemeinerte Zeitableitung von u

$$d_t u \in (L^2(I,V))^* \cong L^2(I,V^*)$$

gilt. Die Einbettung

$$W^{1,2,2}(I,V,V^*) \hookrightarrow C^0(\bar{I},H)$$

(s. Theorem 5.15) zeigt dann, dass die punktweise Auswertung einer schwachen Lösung u zum Zeitpunkt $t = 0$ wohldefiniert ist und somit die Forderung $u(0) = u_0$ in H in Definition 7.7 sinnvoll ist.

7.2 Galerkin-Approximation

Um die Existenz einer schwachen Lösung im Sinne von Definition 7.7 zu beweisen, konstruieren wir eine sogenannte Galerkin-Approximation. Die schwache Lösung erhalten wir dann, indem wir in der Galerkin-Approximation zum Grenzwert $n \to \infty$ im Approximationsparameter übergehen. Im Unterschied zur nichtlinearen Wärmeleitungsgleichung genügt uns für diesen Grenzübergang die schwache Konvergenz der Folge der Galerkin-Lösungen. Diese schwache Konvergenz ist wiederum eine direkte Konsequenz aus gleichmäßigen a-priori-Abschätzungen und der Reflexivität der dabei auftretenden Bochnerräume.
Da V separabel ist, enthält V eine dichte, abzählbare Teilmenge

$$G = \left\{ (w_k) \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\} \subset V.$$

Aus der Dichtheit der Einbettung

$$V = W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) = H$$

folgt auch die Dichtheit der Einbettung $\operatorname{span} G \hookrightarrow H$, das heisst es gilt

$$\overline{\operatorname{span} G}^{\|\cdot\|_H} = H,$$

Setzen wir außerdem $V_n \coloneqq \operatorname{span}\{w_k \,|\, k \leq n\}$, so folgt

$$\overline{\bigcup_{n\geq 1} V_n}^{\|\cdot\|_V} = V,$$

das heisst wir können V durch endlichdimensionale Unterräume approximieren. Wir suchen nun approximative Lösungen $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Form

$$u^n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k^n(t)\, w_k,$$

die das **Galerkin-System**

$$\begin{aligned} \langle u_t^n(t), w_k\rangle_V + \langle Au^n(t), w_k\rangle_V &= \langle f_n(t), w_k\rangle_V,\ k = 1, ..., n, \\ u^n(0) &= u_0^n \end{aligned} \tag{7.12}$$

lösen. Hierbei ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(I, H)$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^2(I, H)$; die Existenz der Folge (f_n) wird durch Korollar 2.10 gesichert. Die Folge $(u_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$u_0^n = \sum_{k=1}^{n} c_{0,k}^n\, w_k \in V_n$$

konvergiert stark gegen u_0 in H, was aus der Dichtheit von $\operatorname{span} G$ in H folgt.

7.3 Lösbarkeit des Galerkin-Systems

Um die Lösbarkeit des Galerkin-Systems (7.12) zu zeigen, zeigen wir, dass sich (7.12) als **System gewöhnlicher Differentialgleichungen** formulieren lässt. Zunächst gilt formal

$$\langle u_t^n(t), w_l\rangle_V = (u_t^n(t), w_l)_H = \sum_{k=1}^{n} \dot{c}_k^n(t)(w_k, w_l)_H.$$

Da die $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (ohne Einschränkung) linear unabhängig sind, ist die Gram'sche Matrix $M := (w_k, w_l)_{1\le k,l\le n}$ invertierbar. Definieren wir außerdem

$$\begin{aligned} &f^n : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \\ &f^n(t,c) := M^{-1}\Big(\langle f_n(t) - A\big(\sum_{k=1}^{n} c_k w_k\big), w_l\rangle_{l=1,\dots,n}\Big) \end{aligned}$$

und schreiben $c^n(t) := \big(c_k^n(t)\big)_{k=1,\dots,n}$ und $c_0^n := \big(c_{0,k}^n\big)_{k=1,\dots,n}$, so ist (7.12) äquivalent zu dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{c}^n(t) &= f^n(t, c^n(t)) \\ c^n(0) &= c_0^n \end{aligned} \tag{7.13}$$

Wegen des Satzes von **Picard-Lindelöf** (s. Blatt 11, Aufgabe 2) besitzt (7.13) zumindest für kurze Zeiten eine Lösung. Das Existenz-Intervall hängt im Allgemeinen von den Daten und $n \in \mathbb{N}$ ab. Wenn wir gleichmäßige a-priori-Abschätzungen in n herleiten können, können wir den Satz von Picard-Lindelöf iterieren und erhalten schließlich die Existenz von Galerkin-Lösungen auf dem gesamten Zeitintervall I.
Dazu multiplizieren wir die l-te Gleichung von (7.13) mit $c_l^n(t)$, wobei $c^n(t)$ eine Kurzzeitlösung von (7.13) ist, summieren über l, integrieren anschließend über t und erhalten[1]

$$\int_0^s (u_t^n(t), u^n(t))_H \,\mathrm{d}t + \int_0^s \langle Au^n(t), u^n(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t = \int_0^s \langle f^n(t), u^n(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t.$$

Wegen $(u_t^n(t), u^n(t))_H = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u^n(t), u^n(t))_H$ ist das äquivalent zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u^n(s)\|_H^2 + \int_0^s \|u^n(t)\|_V^2 \,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\|u^n(0)\|_H^2 + \int_0^s \langle f^n(t), u^n(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t \\ &\le \frac{1}{2}\|u_0^n\|_H^2 + c\int_0^s \|f^n(t)\|_H \|u^n(t)\|_V \,\mathrm{d}t \\ &\le \frac{1}{2}\|u_0^n\|_H^2 + c(\varepsilon)\|f^n\|_{L^2((0,s),H)}^2 + \varepsilon\|u^n\|_{L^2((0,s),V)}^2, \end{aligned}$$

[1] Man beachte insbesondere, dass der Satz von Picard-Lindelöf klassich differnzierbare Lösungen liefert.

wobei wir im letzten Schritt die Young-Ungleichung mit ε verwendet haben. Für hinreichend kleines ε können wir den Term $\varepsilon \|u^n\|^2_{L^2((0,s),V)}$ in der linken Seite absorbieren. Beachten wir außerdem, dass die Approximationen u_0^n von u_0 und f^n von f so konstruiert sind, dass gilt

$$\|u_0^n\|_H \leq \|u_0\|_H \quad \text{und} \quad \|f^n\|_{L^2((0,s),H)} \leq \|f\|_{L^2((0,s),H)}\,,$$

so erhalten wir aus der obigen Abschätzung schließlich

$$\|u^n\|^2_{C([0,s],H)} + \|u^n\|^2_{L^2((0,s),V)} \leq C(u_0, f).$$

Insbesondere können wir den Satz von Picard-Lindelöf iterieren und erhalten somit Approximationslösungen, die auf ganz I definiert sind. Eine Wiederholung der obigen Rechnung liefert dann

$$\|u^n\|^2_{C(\bar{I},H)} + \|u^n\|^2_{L^2(I,V)} \leq C(u_0, f). \tag{7.14}$$

7.4 Konvergenz des Galerkin-Verfahrens

Aus den a-priori-Abschätzungen (7.14) und der Reflexivität der Räume H und $L^2(I,V)$ ergibt sich die Existenz einer Teilfolge, die wir wieder mit $(u^n)_n$ bezeichnen und für die gilt

$$\begin{aligned} &u^n \rightharpoonup u \text{ in } L^2(I,V),\\ &u^n \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ in } L^\infty(I,H). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt außerdem

$$u^n(0) = u_0^n \to u_0 \text{ in } H.$$

Sei nun $w \in \bigcup_{n\geq 1} V_n$ beliebig. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $w \in V_n$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Für alle $n \geq n_0$ folgt dann aber

$$\langle u_t^n(t), w\rangle_V + \langle Au^n(t), w\rangle_V = \langle f^n(t), w\rangle_V.$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $\varphi \in C^1(\bar{I})$, $\varphi(T) = 0$, und anschließende partielle Integration in der Zeit liefern

$$\begin{aligned} -\int_I (u^n(t), w)_H \partial_t \varphi(t)\,\mathrm{d}t &+ \int_I \langle Au^n(t), w\rangle_V \varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_I \langle f^n(t), w\rangle_V \varphi(t)\,\mathrm{d}t + (u_0^n, w)_H \varphi(0). \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert mit der Stetigkeit von A

$$
\begin{aligned}
-\int_I (u(t), w)_H \partial_t \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_I \langle Au(t), w\rangle_V \varphi(t)\,\mathrm{d}t& \\
= \int_I \langle f(t), w\rangle_V \varphi(t)\,\mathrm{d}t + (u_0, w)_H \varphi(0).& \qquad (7.15)
\end{aligned}
$$

Da $\bigcup_{n\geq 1} V_n$ dicht in V liegt, gilt (7.15) für alle $w \in V$ und alle $\varphi \in C^1(\bar{I})$ mit $\varphi(T) = 0$. Wählen wir in (7.15) $w \in V$ und $\varphi \in C_0^\infty$ beliebig, so gilt

$$
-\int_I (u(t), w)_H \partial_t \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \langle f(t) - Au(t), w\rangle_V \varphi(t)\,\mathrm{d}t.
$$

Mit der Hölder-Ungleichung und der Dichtheit der Menge $\{\varphi w \,|\, \varphi \in C_0^\infty(I), w \in V\}$ in $L^2(I, V)$ folgt

$$
d_t u = f(t) - Au(t) \in (L^2(I, V))^* \cong L^2(I, V^*).
$$

Insgesamt ist also

$$
u \in W^{1,2,2}(I, V, V^*) \hookrightarrow C(\bar{I}, H).
$$

Dann gilt für $w \in V$ und $\varphi \in C^1(\bar{I})$ mit $\varphi(T) = 0$ einerseits mit partieller Integration

$$
\begin{aligned}
\int_I (u(t), w)_H \partial_t \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \langle f(t) - Au(t), w\rangle_V \varphi(t)\,\mathrm{d}t& \\
= \int_I (u(t), w)_H \partial_t \varphi(t) + \langle d_t u(t), w\rangle_V \varphi(t)\,\mathrm{d}t& \\
= -(u(0), w)_H \varphi(0)&
\end{aligned}
$$

und andererseits gilt aber (7.15). Zusammen ergibt das

$$
(u(0), w)_H \varphi(0) = (u_0, w)_H \varphi(0),
$$

für alle $w \in V$ und $\varphi \in C^1(\bar{I})$ mit $\varphi(T) = 0$. Für φ mit $\varphi(0) \neq 0$ folgt mit der Dichtheit der Einbettung $V \hookrightarrow H$ schließlich

$$
u(0) = u_0 \text{ in } H.
$$

Insgesamt hat der schwache Grenzwert u die folgenden Eigenschaften:

1. u liegt in $L^2(I, V) \cap L^\infty(I, H)$,
2. Für alle Testfunktionen $w \in V$ und $\varphi \in C_0^\infty(I)$ erfüllt u die schwache Formulierung

$$
-\int_I (u(t), w)_H \partial_t \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_I \langle Au(t), w\rangle_V \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \langle f(t), w\rangle_V \varphi(t)\,\mathrm{d}t,
$$

3. Die verallgemeinerte Zeitableitung $d_t u$ liegt in $L^2(I, V^*)$.

4. Für den Anfangswert gilt $u(0) = u_0$ in H.

Damit ist $u \in W^{1,2,2}(I, V, V^*) \hookrightarrow C(\bar{I}, H)$ aber eine schwache Lösung der linearen Wärmeleitungsgleichung im Sinne von Definition 7.7.

8 Nichtlineare elliptische Probleme und der Schaudersche Fixpunktsatz

Bevor wir zum Existenzsatz für die nichtlineare Wärmeleitungsgleichung (7.1) kommen, wollen wir ein Existenzresultat für ein nichtlineares elliptisches Modellproblem der Form

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A\nabla u) &= f(u) \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{8.1}$$

unter bestimmten Voraussetzungen an A und f beweisen.
Die Struktur dieses Beweises lässt sich dann auf den Existenzbeweis für die nichtlineare Wärmeleitungsgleichung übertragen, ist aber im elliptischen Fall technisch weniger aufwändig. Der Existenzbeweis für (8.1) besteht aus den folgenden Schritten:

- **Linearisierung:** Nachdem wir passende Wachstumsbedingungen an f formuliert haben, wählen wir eine Funktion v, deren genaue Eigenschaften wiederum von der Struktur von f abhängen, und betrachten zunächst das (in u) lineare Probleme

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A\nabla u) &= f(v) \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{8.2}$$

- **Lax-Milgram:** Die Funktion wird so gewählt sein, dass (8.2) mit Hilfe des Lemmas von Lax-Milgram eindeutig lösbar ist.

- **Nichtlinearer Lösungsoperator:** Die Zuordnung $v \mapsto u$, die die Linearisierung auf die eindeutige schwache Lösung von (8.2) abbildet, definiert einen nichtlinearen Operator

$$T : X \to X,$$

wobei X ein dem Problem angepasster Banachraum ist. A-priori Abschätzungen für u liefern uns eine Kugel $B_R(0) \subset X$, so dass gilt

$$T : B_R(0) \to B_R(0).$$

- **Kompaktheit und Schauderscher Fixpunktsatz:** Wir zeigen, dass der oben definierte Operator T kompakt ist. Der Schaudersche Fixpunktsatz liefert dann

$$u \in B_R(0) \subset X \text{ mit } Tu = u.$$

Dieser Fixpunkt wird die schwache Lösung des nichtlinearen Problems (8.1) sein.

8.1 Zwei Varianten des Schauderschen Fixpunktsatzes

Bevor wir die einzelnen Punkte abarbeiten, geben wir zwei Varianten des Schauderschen Fixpunktsatzes an.

Theorem 8.3 (Schauderscher Fixpunktsatz I)
Sei $T : M \subseteq X \to M$ stetig, wobei X ein Banachraum und M eine nichtleere, konvexe, kompakte Teilmenge ist. Dann hat T einen Fixpunkt.

Beweis. Siehe [Růž04]. □

Mitunter ist es einfacher die Kompaktheit eines Operators zu zeigen, als die Kompaktheit einer Teilmenge eines unendlichdimensionalen Banachraums zu begründen. Die folgende alternative Variante des Schauderschen Fixpunktsatzes ist daher im Hinblick auf Anwendungen oft nützlicher.
Zunächst sei daran erinnert, dass ein Operator zwischen Banachräumen X, Y **kompakt** heisst, falls T stetig ist und beschränkte Mengen in X auf relativkompakte Mengen in Y abbildet, wenn also die folgende Implikation gilt:

$$B \subset X \text{ beschränkt } \Rightarrow \overline{T(B)} \subset Y \text{ kompakt.}$$

Die zweite Variante des Schauderschen Fixpunktsatzes lautet dann:

Theorem 8.4 (Schauderscher Fixpunktsatz II)
Ist M eine nichtleere, konvexe, abgeschlossene und beschränkte Teilmenge eines Banachraums X und ist $T : M \subset X \to M$ kompakt, so hat T einen Fixpunkt.

Beweis. Siehe [Růž04]. □

8.2 Struktur der Nichtlinearität und schwache Formulierung

Die Voraussetzungen an die Daten A und f lauten:

- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und erfülle die **Wachstumsbedingungen**[1]

$$|f(x)| \leq c\,(1 + |x|^{\delta}),\ \delta \in [0, 1). \tag{8.5}$$

- Die Matrix-wertige Funktion $A \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$ sei **α-elliptisch**, das heisst es existiere eine Konstante $\alpha > 0$, so dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\lambda_i\lambda_j \geq \alpha\,|\lambda|^2.$$

[1] Die Wachstumsbedingung ist nicht optimal.

Die Frage nach der passenden Linearisierung im ersten Schritt, hängt mit der Wachstumsbedingung an f zusammen. Da wir im zweiten Schritt das Lemma von Lax-Milgram anwenden wollen, muss die Linearisierung v möglichst so gewählt werden, dass $f(v)$ ein Funktional auf dem naheliegenden Hilbertraum $(W_0^{1,2}(\Omega), \|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)})$ definiert. Nun gilt:

Lemma 8.6

Erfüllt die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Wachstumsbedingung (8.5) so induziert sie einen kompakten Operator

$$\begin{aligned} F : W_0^{1,2}(\Omega) &\to \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^*, \\ \langle Fv, \varphi\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} &:= \int_\Omega f(v)\, \varphi \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Beweis. Für festes $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ist die Funktion $f(v) : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar, wie man leicht mittels Approximation von v durch Treppenfunktionen sieht. Falls $f(v)$ in $L^2(\Omega)$ liegt, so folgt für alle $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ die Abschätzung

$$\langle Fv, \varphi\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le \|f(v)\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \le c\, \|f(v)\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

mit der Hölderschen Ungleichung sowie der Poincaré-Ungleichung. Aber dann folgt

$$\|Fv\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))^*} = \sup_{\|\varphi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le 1} |\langle Fv, \varphi\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}| \le c\, \|f(v)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{8.7}$$

Somit ist F wohldefiniert falls $f(v) \in L^2(\Omega)$ gilt. Mit Hilfe der Wachstumsbedingung an f und der Minkowski- und Hölder-Ungleichung sehen wird aber

$$\begin{aligned} \|f(v)\|_{L^2(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |f(v)|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} &\le \Big(\int_\Omega (1 + |v|^\delta)^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \\ &\le c\Big(\int_\Omega 1\mathrm{d}x\Big)^{1/2} + c\Big(\int_\Omega 1\, |v|^{2\delta} \,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \\ &\le c(\Omega) + c(\Omega, \delta)\, \|v\|_{L^2(\Omega)}^\delta \\ &\le c + c\, \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^\delta. \end{aligned}$$

Wir kommen nun zur Kompaktheit von F. Sei dazu $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Dann konvergiert eine Teilfolge $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall in Ω gegen v. Da f stetig ist gilt für $k \to \infty$

$$f(v_{n_k}) \to f(v) \text{ fast überall in } \Omega.$$

Andererseits folgt aus der Wachstumsbedingung (8.5) zusammen mit dem verallgemeinerten Satz von Lebesgue dann

$$\lim_{k\to\infty} f(v_{n_k}) = f(v) \text{ in } L^2(\Omega).$$

Da diese Argumentation für jede konvergente Teilfolge von $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt, muss schon

$$\lim_{n\to\infty} f(v_n) = f(v) \text{ in } L^2(\Omega)$$

gelten. Aus der Abschätzung (8.7) ergibt sich dann sofort die Stetigkeit von F. Bleibt zu zeigen, dass F in $W_0^{1,2}(\Omega)$ beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen in $(W_0^{1,2}(\Omega))^*$ abbildet. Sei dazu $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ eine beschränkte Folge[2]. Nach dem **Satz von Rellich** gilt die kompakte Einbettung

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Daher existiert eine Teilfolge $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $v \in L^2(\Omega)$, so dass gilt

$$\lim_{k\to\infty} v_{n_k} = v \text{ in } L^2(\Omega). \tag{8.8}$$

Wie im Beweis der Stetigkeit von F folgt dann aber andererseits $\lim_{k\to\infty} f(v_{n_k}) = f(v)$ in $L^2(\Omega)$ und damit auch

$$\lim_{k\to\infty} Fv_{n_k} = Fv \text{ in } \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*. \tag{8.9}$$

Damit ist F kompakt. $\square$

Bemerkung 8.10

Der Beweis zeigt, dass F auch wohldefiniert und stetig auf $L^2(\Omega)$ wäre.

Wir definieren als nächstes eine von A induzierte stetige Bilinearform

Lemma 8.11

Sei $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$ eine α-elliptische Matrix-wertige Funktion. Dann definiert

$$\begin{aligned} &a : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}, \\ &a(u,\varphi) := \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega A_{ij}\,\partial_i u\,\partial_j\varphi\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

eine stetige, bilineare, α-koerzive Abbildung.

Beweis. Die Bilinearität von $a(\cdot,\cdot)$ ist klar und die Stetigkeit von $a(\cdot,\cdot)$ folgt sofort aus der Hölder-Ungleichung unter Verwendung der Tatsache, dass $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$ gilt. Die α-Koerzivität von $a(\cdot,\cdot)$ ist eine Konsequenz der α-Elliptizität von A, denn für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt:

$$a(u,u) = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega A_{ij}\,\partial_i u\,\partial_j u\,\mathrm{d}x \geq \alpha \int_\Omega \|\nabla u\|^2\,\mathrm{d}x = \alpha\,\|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

[2] Wir können an dieser Stelle mit Folgenkompaktheit argumentieren, weil in Banachräumen Folgen- und Überdeckungskompaktheit äquivalent sind.

Daraus folgt sofort

$$\lim_{\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \to \infty} \frac{a(u,u)}{\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}} = \infty.$$

□

Definition 8.12 (Schwache Form des linearisierten Problems)
Die schwache Formulierung des mittels $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ linearisierten Problems (8.2) lautet nun: Finde $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so dass für alle Testfunktionen $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ die Identität

$$a(u, \varphi) = \langle Fv, \varphi \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} \tag{8.13}$$

erfüllt ist.

Bemerkung 8.14 (Äquivalente Operatorgleichung)
Analog zur Formulierung der linearen Wärmeleitungsgleichung als Operatordifferentialgleichung, siehe (7.11), können wir die Identität (8.13) äquivalent als ***Operatorgleichung*** *in $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^*$ schreiben. Wir definieren dazu den von der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ (unter leichtem Notationsmissbrauch) induzierten Operator*

$$\begin{aligned} A : W_0^{1,2}(\Omega) &\to \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^*, \\ \langle Au, \varphi \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} := a(u,\varphi) &= \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Es ergibt sich direkt aus den Eigenschaften der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$, dass der Operator $A : W_0^{1,2}(\Omega) \to \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^*$ linear, stetig, α-koerziv und ***stark monoton*** *ist. Dabei bedeutet die starke Monotonie von A, dass für alle $u, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ die Abschätzung*

$$\langle Au - A\varphi, u - \varphi \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} \geq \alpha \, \|u - \varphi\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

gilt und α-Koerzivität bedeutet, dass für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\langle Au, u \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} \geq \alpha \, \|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

gilt. Dann ist $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von (8.2), falls die äquivalente Operatorgleichung

$$Au = Fv \text{ in } \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^* \tag{8.15}$$

erfüllt ist.

Bemerkung 8.16
Die ***Theorie monotoner Operatoren****, siehe [Růž04] und [GGZ74], beschäftigt sich mit der Lösbarkeit von Operatorgleichungen für (nichtlineare) monotone Operatoren $A : X \to X^*$ auf einem Banachraum X. Der in dieser Theorie zentrale* ***Existenzsatz von Browder-Minty*** *kann als nichtlineare Version des Lemmas von Lax-Milgram interpretiert werden. Er findet seine Hauptanwendung in der Theorie schwacher Lösungen elliptischer und parabolischer Differentialgleichungen, für die der entsprechende (im Allgemeinen nichtlineare) elliptische Differentialoperator einen monotonen Operator auf einem geeigneten Banachraum induziert.*

8.3 Lösbarkeit mittels Linearisierung und Kompaktheit

Das Lemma von Lax-Milgram liefert nun sofort die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des linearisierten Problems im Sinne von (8.13). Die Eindeutigkeit folgt dabei direkt aus der α-Koerzivität von $a(\cdot,\cdot)$, denn sind $u_1, u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ schwache Lösungen zum gleichen Linearisierungsparameter $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so folgt zunächst aus der Bilinearität von $a(\cdot,\cdot)$

$$a(u_1 - u_2, \varphi) = \langle Fv - Fv, \varphi\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} = 0$$

für alle $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Mit $\varphi := u_1 - u_2$ folgt dann die Eindeutigkeit aus der Abschätzung

$$\alpha \, \|u_1 - u_2\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0,$$

so dass wir den zweiten Schritt unseres Existenzbeweises erledigt haben.
Für den dritten Schritt definieren wir zunächst $X := W_0^{1,2}(\Omega)$ und den nichtlinearen Operator

$$\begin{aligned} T : X &\to X, \\ Tv &=: u, \end{aligned}$$

wobei $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ die nach Schritt zwei eindeutige Lösung des mittels $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ linearisierten Problems (8.2) bezeichnet. Der nächste Schritt besteht im Nachweis der Existenz einer abgeschlossenen Kugel $B_R(0) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$, so dass gilt

$$T : B_R(0) \to B_R(0).$$

Die α-Koerzivität der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ impliziert

$$\alpha \, \|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le a(u,u) = \langle Fv, u\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le c\|Fv\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))^*}\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Mit (8.7) und (8.8) folgt daraus

$$\|Tv\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq c/\alpha + c/\alpha \, \|v\|^{\delta}_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Es gilt also $T : B_R(0) \to B_R(0)$, falls wir $R > 0$ so gross wählen, dass gilt

$$c/\alpha + c/\alpha \, R^{\delta} \leq R \tag{8.17}$$

Nach Voraussetzung ist aber $\delta \in [0,1)$ und somit existiert ein R_0 so dass (8.17) für alle Radien $R \geq R_0$ erfüllt ist. Um nun im vierten Schritt mit der zweiten Variante des Schauderschen Fixpunktsatzes, siehe Theorem 8.4, auf die Existenz eines Fixpunktes schließen zu können, müssen wir die Kompaktheit von T nachweisen. Wir werden jedoch gleich sehen, dass T die Kompaktheitseigenschaften des in Lemma 8.6 definierten Operators F erbt. Sei dazu $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Wir müssen zeigen, dass für $n \to \infty$ dann auch

$$u_n = Tv_n \to u = Tv \text{ in } W_0^{1,2}(\Omega) \tag{8.18}$$

folgt. Mit Hilfe der Operatorschreibweise (8.15) gilt zunächst für alle $n \in \mathbb{N}$

$$Au_n = A(Tv_n) = Fv_n \text{ in } \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^*.$$

Dank der Stetigkeit von F, siehe Lemma 8.6, sowie der Stetigkeit des von der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ induzierten Operators A, können wir jedoch in dieser Identität zum Grenzwert $n \to \infty$ übergehen und erhalten

$$Au = Fv \text{ in } \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^*.$$

Nach Definition des Operators T lesen wir aus dieser Gleichung die Gültigkeit von (8.18) ab, das heisst insbesondere ist T stetig. Sei nun $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ beschränkt. Da F beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet, existiert eine Teilfolge $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so dass gilt

$$\lim_{k\to\infty} Fv_{n_k} = Fv \text{ in } \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^*.$$

Mit der gleichen Argumentation wie oben können wir in der für alle $k \in \mathbb{N}$ geltenden Identität

$$Au_{n_k} = Fv_{n_k} \text{ in } \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^*$$

zum Grenzwert $k \to \infty$ übergehen und erhalten daher analog wie davor

$$\lim_{k\to\infty} Tv_{n_k} = Tv \text{ in } W_0^{1,2}(\Omega).$$

Mithin ist T kompakt und hat aufgrund von Theorem 8.4 einen Fixpunkt $u \in B_R(0) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$. Aber dann gilt per Definition

$$Au = A(Tu) = Fu \text{ in } \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^*,$$

was wir für alle Testfunktionen $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ äquivalent schreiben können als

$$\langle Au, \varphi \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} = a(u, \varphi) = \langle Fu, \varphi \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Insgesamt ist $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ somit eine schwache Lösung des nichtlinearen elliptischen Problems (8.1).

9 Nichtlineare Wärmeleitungsgleichung

In diesem Kapitel wollen wir das Existenzresultat für die lineare Wärmeleitungsgleichung aus Kapitel 7 auf eine nichtlineare Wärmeleitungsgleichung der Form

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f(u) && \text{in } I \times \Omega, \\ u &= 0 && \text{in } I \times \partial\Omega, \\ u(0) &= u_0 && \text{in } \Omega \end{aligned} \tag{9.1}$$

übertragen.
Im Unterschied zur linearen Wärmeleitungsgleichung (7.2), enthält (9.1) einen nichtlinearen Term niederer Ordnung. Beim Versuch den Existenzsatz, den wir mittels Galerkin-Approximation geführt haben, auf den nichtlinearen Fall zu übertragen, entsteht die Schwierigkeit, im Galerkin-System zum Grenzwert überzugehen. Der Grund dafür besteht in der Tatsache, dass die schwache Konvergenz der Galerkinlösungen im Allgemeinen nicht ausreicht, um den Grenzwert der Folge $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ zu identifizieren. Die Lösung dieses Problems besteht nun darin, mit Hilfe einer zusätzlichen Abschätzung der Zeitableitungen der Galerkinlösungen, das Kompaktheitslemma von Aubin-Lions ins Spiel zu bringen, um schließlich starke Konvergenz der Approximationslösungen zu erhalten. Dieser Zugang wird in [Růž04] ausführlich im Kontext der instationären Variante der Theorie monotoner Operatoren behandelt.
Wir wollen hier einen alternativen Zugang wählen, der auf einer Kombination von Abschneiden und Linearisierung der Nichtlinearität mit dem Schauderschen Fixpunktsatz beruht. Im Detail bedeutet das, dass wir zunächst f durch eine beschränkte Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ approximieren und für festes $k \in \mathbb{N}$ die Funktion f_k mittels $\xi \in L^q(I, B)$, wobei q und B noch zu bestimmen sein werden, linearisieren. Das in u lineare Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f_k(\xi) && \text{in } I \times \Omega, \\ u &= 0 && \text{in } I \times \partial\Omega, \\ u(0) &= u_0 && \text{in } \Omega \end{aligned} \tag{9.2}$$

besitzt nach dem Existenzresultat für die lineare Wärmeleitungsgleichung eine eindeutige schwache Lösung $u = u_k$. Für festes $k \in \mathbb{N}$ definiert die Abbildung

$$\xi \mapsto u_k$$

einen nichtlinearen Operator T_k zwischen Teilmengen von geeigneten Bochnerräumen. Ein Fixpunkt von T_k ist dann eine schwache Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \partial_t u_k - \Delta u_k &= f_k(u_k) && \text{in } I \times \Omega, \\ u_k &= 0 && \text{in } I \times \partial\Omega, \\ u_k(0) &= u_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Für $k \to \infty$ konvergiert die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ schließlich gegen eine schwache Lösung von (9.1).

9.1 Struktur der Nichtlinearität

Wie auch im vorangegangenen Kapitel, bestimmt die Struktur der Nichtlinearität wesentlich die Wahl der Funktionenräume und insbesondere der Menge M, auf die der Lösungsoperator T_k wirkt, siehe auch Theorem 8.4.
Um ein optimales Kompaktheitsresultat für unseren Existenzsatz zu erhalten, stellen wir nun einige Forderungen an f und verknüpfen diese anschließend mit einigen Folgerungen aus dem Lemma von Aubin-Lions.

- **Wachstum:** Die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Wachstumsbedingung
$$|f(x)| \leq c\,(1 + |x|^{r-1}) \tag{9.4}$$
für ein $r \in [1, \infty)$.
- **Koerzivität:** Es gelte
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)x \leq 0. \tag{9.5}$$

Bemerkung 9.6
*Es ist auch möglich zeitabhängige Nichtlinearitäten f zuzulassen, die eine sogenannte **Carathéodory-Bedingung** erfüllen. Die Koerzivitätsbedingung (9.5) ist entscheidend für spätere a priori Abschätzungen, kann aber auch noch verallgemeinert werden.*

Wie bei der elliptischen Gleichung (8.1), induziert die Funktion f wieder einen Operator, der unter zusätzlichen Annahmen über r, den raum $W_0^{1,2}(\Omega)$ in seinen Dualraum abbildet.

Proposition 9.7 (F stationär)

1. *Der nichtlineare Operator*
$$\begin{aligned} \tilde{F} : L^r(\Omega) &\to L^{r'}(\Omega) \cong \big(L^r(\Omega)\big)^*, \\ \langle \tilde{F}u, v\rangle_{L^r(\Omega)} &:= \int_\Omega f(u)\, v \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$
ist stetig und beschränkt.

2. *Für $r \leq 6$ ist der nichtlineare Operator*

$$\tilde{F} : W_0^{1,2}(\Omega) \to \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^*,$$
$$\langle \tilde{F}u, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} := \int_\Omega f(u)\, v \,\mathrm{d}x$$

   stetig und beschränkt.

3. *Für $r < 6$ ist F kompakt.*

Beweis. Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis von Lemma 8.6, wenn man den dort verwendeten **Rellichschen Einbettungssatz** an den entsprechenden Stellen durch den allgmeinen **Sobolevschen Einbettungssatz** ersetzt: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand, und ist $1 \leq p < d$ so gilt für alle $1 \leq q \leq p^* := \frac{dp}{d-p}$ die stetige Einbettung

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \tag{9.8}$$

Für alle $1 \leq q < p^*$ ist die Einbettung (9.8) kompakt.

Bemerkung 9.9
*Der **optimale Einbettungsexponent** $p^* = \frac{dp}{d-p}$ wird manchmal auch als Sobolev-Exponent bezeichnet. In unserem Fall ist $2^* = \frac{3\cdot 2}{3-2} = 6$.*

□

9.2 Fortsetzung des induzierten Operators

Den in der vorangegangenen Proposition definierten Operator wollen wir zu einem kompakten Operator auf einem der Wachstumsbedingung (9.4) angepassten Bochnerraum fortsetzen. Es sei an dieser stelle noch einmal daran erinnert, dass die kompakte Einbettung

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^r(\Omega),\ 1 \leq r < 6$$

nicht die Kompaktheit der stetigen Einbettung

$$L^q(I, W_0^{1,2}(\Omega)) \hookrightarrow L^q(I, L^r(\Omega)),\ 1 < q < \infty,\ 1 \leq r < 6,$$

nach sich zieht. Wir können diese Problem lösen, indem wir F auf einem Teilraum von $L^q(I, W_0^{1,2}(\Omega))$, q passend, definieren und das Lemma von Aubin-Lions verwenden. Genauer gesagt wollen wir zur Wärmeleitungsgleichung passende Räume X, Y und Exponenten p, q finden und F dann fortsetzen zu

$$F : W^{1,p,q}(I, X, Y) \to L^{r'}(I, L^{r'}(\Omega)) \subset \big(W^{1,p,q}(I, X, Y)\big)^*.$$

Die Kompaktheit von F wird eine Folgerung der vom Lemma von Aubin-Lions implizierten kompakten Einbettung

$$W^{1,p,q}(I,X,Y) \hookrightarrow\hookrightarrow L^r(I,L^r(\Omega))$$

sein. Man sieht an dieser Stelle auch, dass das Kompaktheitslemma von Aubin-Lions im parabolischen Fall die Rolle des Rellichschen Einbettungssatzes aus der elliptischen Theorie übernimmt.
Bevor wir zu den Details kommen, sei noch einmal an die kanonischen Räume für die lineare Wärmeleitungsgleichung erinnert. Eine schwache Lösung zu Daten $f \in L^2(I,L^2(\Omega))$ und $u_0 \in L^2(\Omega)$ ist eine Funktion $u \in L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(I,L^2(\Omega))$, die die schwache Formulierung

$$-\int_I (u(t),\eta_t(t))_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t + \int_I \langle Au(t),\eta(t)\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}t = \int_I (f(t),\eta(t))_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t \tag{9.10}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(I)$ und $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$ sowie die Anfangsbedingung

$$u(0) = u_0 \text{ in } L^2(\Omega),$$

erfüllt. Wir hatten im Existenzbeweis gezeigt, dass für eine schwache Lösung automatisch

$$d_t u \in \big(L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega))\big)^* \cong L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega)^*)$$

gilt, und dass die Räume $\big(W_0^{1,2}(\Omega),L^2(\Omega),W_0^{1,2}(\Omega)^*\big)$ in natürlicher Weise ein Gelfand-Tripel bilden. Eine naheliegende Wahl für $W^{1,p,q}(I,X,Y)$ wäre daher der Raum

$$\mathbf{W} := W^{1,2,2}(I,W_0^{1,2}(\Omega),W_0^{1,2}(\Omega)^*) = \big\{\, u \in L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega)) \,\big|\, d_t u \in \big(L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega))\big)^* \,\big\}.$$

Da die Einbettung $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ nicht nur stetig und dicht, sondern auch kompakt ist, liefert das Lemma von Aubin-Lions die kompakte Einbettung

$$\mathbf{W} \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(I,L^2(\Omega)) \cong L^2(I\times\Omega),$$

was zunächst nicht zum $(r-1)$-Wachstum unserer Nichtlinearität f zu passen scheint. Um diese scheinbare Diskrepanz zu überwinden und ein möglichst optimales Kompaktheitsresultat zu erhalten, brauchen wir das weiter unten folgende Interpolationsresultat, mit dessen Hilfe wir das Aubin-Lions-Lemma verfeinern können.

Lemma 9.11
Für alle $1 \le r < 2^* = 6$ ist die Einbettung

$$\boldsymbol{W} \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(I,L^r(\Omega))$$

kompakt.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus dem Lemma von Aubin-Lions und der Tatsache, dass für alle $1 \leq r < 2^*$ wegen

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^r(\Omega) \hookrightarrow \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^*$$

die Voraussetzungen des Ehrling-Lemmas erfüllt sind. □

Unser Ziel ist es allerdings, eine kompakte Einbettung in den Raum $L^r(I, L^r(\Omega)) \cong L^r(I \times \Omega)$ zubeweisen. Das heisst wir müssen die Integrabilität in der Zeit tendenziell weiter erhöhen. Dabei hilft uns das folgende

Lemma 9.12
Sei $1 \leq p < d$, $q > 2$, und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Dann gilt

$$L^p(I, L^q(\Omega)) \cap L^\infty(I, L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\alpha(I, L^\beta(\Omega)) \tag{9.13}$$

für alle $p < \alpha < \infty$ und $2 < \beta < q$ mit

$$\alpha \leq p\,\frac{\beta(q-2)}{q(\beta-2)} \tag{9.14}$$

Beweis. Für fast alle $t \in I$ gilt

$$\|u(t)\|_{L^\beta(\Omega)} \leq \|u(t)\|^\lambda_{L^q(\Omega)} \|u(t)\|^{1-\lambda}_{L^2(\Omega)}$$

für $\frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{q} + \frac{1-\lambda}{2}$, $0 < \lambda < 1$, was man leicht mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung sieht. Integrieren wir die α-te Potenz dieser Ungleichung bezüglich t über I so folgt

$$\int_I \|u(t)\|^\alpha_{L^\beta(\Omega)}\,\mathrm{d}t \leq \|u\|^{\alpha(1-\lambda)}_{L^\infty(I,L^2(\Omega))} \int_I \|u(t)\|^{\alpha\lambda}_{L^q(\Omega)}\,\mathrm{d}t.$$

Die Forderung $\alpha\lambda \leq p$ liefert schließlich die Bedingung (9.14). □

Für eine schwache Lösung der linearen Wärmeleitungsgleichung gilt

$$u \in L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(I, L^2(\Omega)).$$

Zusammen mit dem Sobolevschen Einbettungssatz

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \text{ für alle } r \leq 2^* = 6$$

liefert das obige Lemma die Einbettung

$$L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(I, L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\alpha(I, L^\beta(\Omega))$$

für alle $2 < \alpha < \infty$ und $2 < \beta < 2^* = 6$ mit

$$\alpha \leq 2\,\frac{\beta(2^*-2)}{2^*(\beta-2)}.$$

Fordern wir $\alpha = \beta$, so folgt für alle $1 \leq \alpha \leq 2\,\frac{3+2}{3} = \frac{10}{3}$

$$L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(I, L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\alpha(I, L^\alpha(\Omega)) \cong L^\alpha(I \times \Omega).$$

Für schwache Lösungen gilt aber auch

$$u \in \mathbf{W} \hookrightarrow C(\bar{I}, L^2(\Omega)),$$

wobei wir für die Einbettung Theorem 5.15 benutzt haben. Insbesondere folgt dann aber für alle $1 \leq \alpha \leq 10/3$ und alle $u \in W^{1,2,2}(I, W_0^{1,2}(\Omega), W_0^{1,2}(\Omega)^*)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{L^\alpha(I\times\Omega)} \leq c\,\|u\|_{\mathbf{W}}.$$

Folgerung 9.15 (Optimale kompakte Einbettung)
Für alle $1 \leq \alpha < 10/3$ *gilt*

$$\boldsymbol{W} \hookrightarrow\hookrightarrow L^\alpha(I, L^\alpha(\Omega)).$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass für alle $1 \leq r < 6$

$$\mathbf{W} \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(I, L^r(\Omega)) \tag{9.16}$$

gilt. Ist daher $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{W}$ eine beschränkte Folge, so existiert eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $u \in L^2(I, L^r(\Omega))$ derart, dass für alle $1 \leq r < 6$ und $k \to \infty$ gilt

$$u_{n_k} \to u \text{ in } L^2(I, L^r(\Omega)).$$

Wie in Lemma 9.12 folgt dann aber

$$\begin{aligned}
\int_I \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_{L^\alpha(\Omega)}^\alpha \,\mathrm{d}t &\leq \|u_{n_k} - u\|_{L^\infty(I,L^2(\Omega))}^{4/3} \int_I \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_{L^r(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}t \\
&\leq c\,\|u_{n_k} - u\|_{\mathbf{W}}^{4/3} \int_I \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_{L^r(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}t \\
&\leq C \int_I \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_{L^r(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}t \overset{k\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

und daher

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = u \text{ in } L^\alpha(I, L^\alpha(\Omega)) \cong L^\alpha(I \times \Omega).$$

$\square$

Vor dem Hintergrund der letzten Resultate legen wir nun den Wachstumsparameter der Nichtlinearität f, siehe (9.4), fest auf

$$1 \le r < 10/3.$$

Wir werden gleich sehen, dass wir mit Hilfe dieser Forderung den oben definierten Operator F, zu einem kompakten Operator auf geeigneten Bochnerräumen fortsetzen können. Hierbei ist insbesondere zu beobachten, dass das maximal zulässige Wachstum im Hinblick auf Kompaktheit im Vergleich zum stationären Fall, den wir in Proposition 9.7 behandelt hatten, schwächer ausfällt!

Proposition 9.17 (Induzierter Operator)
Die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle für $1 \le r \le 10/3$ die Wachstumsbedingung

$$|f(x)| \le c\,(1 + |x|^{r-1}).$$

Dann gilt:

1. *Die Funktion f induziert einen **beschränkten** Operator*
$$F : L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(I, L^2(\Omega)) \to \big(L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega))\big)^*,$$
$$\langle Fu, v\rangle_{L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega))} := \int_I \int_\Omega f(u)v \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_I \langle \tilde{F}u(t), v(t)\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} \mathrm{d}t,$$
wobei $\tilde{F}$ in Proposition 9.7 definiert ist.
2. *Für $1 \le r < 10/3$ ist*
$$F : \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{W}^*$$
***kompakt**.*
3. *Für $1 \le r < 10/3$ ist*
$$F : L^r(I \times \Omega) \to L^{r'}(I \times \Omega)$$
***beschränkt**.*

Beweis. Wir setzen $r_0 = 10/3$. Dann gilt für alle $u \in L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(I, L^2(\Omega))$ und alle $v \in L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega))$

$$\begin{aligned}
\langle Fu, v\rangle_{L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega))} &\le c \int_I \int_\Omega c\,(1 + |u|)^{r_0-1}|v| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\le c \int_I \big(1 + \|u(t)\|^{r_0-1}_{L^{\frac{6(r_0-1)}{5}}(\Omega)}\big) \,\|\nabla v(t)\|_{L^2(\Omega)} \,\mathrm{d}t \\
&\le c\Big(1 + \int_I \|u(t)\|^{2(r_0-1)}_{L^{\frac{6(r_0-1)}{5}}(\Omega)} \,\mathrm{d}t\Big)^{1/2} \Big(\int_I \|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \,\mathrm{d}t\Big)^{1/2} \\
&\le c\Big(1 + \|u\|_{L^{2(r_0-1)}(I, L^{\frac{6(r_0-1)}{5}}(\Omega))}\Big)^{1/2} \|v\|_{L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die optimale Einbettung $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, sowie die Hölder-Ungleichung mit den Exponenten

$$s = \frac{dp}{d-p} = \frac{3 \cdot 2}{3-2} = 6 \text{ und } s' = \frac{dp}{d(p-1)+p} = \frac{6}{5}$$

benutzt. Die Beschränktheit von F folgt nun aus der Tatsache, dass mit $p = 2$, $q = 6$ und $r_0 = 10/3$, die Parameter

$$\alpha = 2\,(r_0 - 1) \text{ und } \beta = \frac{6(r_0 - 1)}{5}$$

die Bedingung (9.14) aus Lemma 9.12 erfüllen, wie man leicht durch advanced Bruchrechnung bestätigt ;-). Damit haben wir die erste Behauptung bewiesen.
Unter Beachtung der stetigen Einbettungen

$$\mathbf{W} \hookrightarrow C(\bar{I}, L^2(\Omega)) \text{ und } \big(L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega))\big)^* \hookrightarrow \mathbf{W}^*$$

folgt die Wohldefiniertheit von $F : \mathbf{W} \to \mathbf{W}^*$ aus der ersten Behauptung.
Sei nun $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbf{W}$ mit $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ in $\mathbf{W}$. Wegen Folgerung 9.15, konvergiert $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann auch stark gegen u in $L^r(I \times \Omega)$ für alle $1 \le r < 10/3$. Eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann aber auch fast überall in $I \times \Omega$ gegen u. Da die stetige Funktion f die Wachstumsbedingung (9.4) erfüllt, liefert der verallgemeinerte Satz von Lebesgue für $k \to \infty$

$$f(u_{n_k}) \to f(u) \text{ in } L^{r'}(I \times \Omega).$$

Mit dem Konvergenzprinzip erhalten wir dann aber auch

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(u) \text{ in } L^{r'}(I \times \Omega).$$

Die Stetigkeit von F sehen wir mithin aus den folgenden Abschätzung ein. Es gilt wegen $\mathbf{W} \hookrightarrow L^r(I \times \Omega)$

$$\begin{aligned}\langle Fu_n - Fu, v\rangle_{\mathbf{W}} &= \int_I \langle \tilde{F}u_n - \tilde{F}u, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}t \\ &\le \|f(u_n) - f(u)\|_{L^{r'}(I\times\Omega)} \|v\|_{L^r(I\times\Omega)} \\ &\le c\,\|f(u_n) - f(u)\|_{L^{r'}(I\times\Omega)} \|v\|_{\mathbf{W}}\end{aligned}$$

und damit

$$\|Fu_n - Fu\|_{\mathbf{W}^*} \le c\,\|f(u_n) - f(u)\|_{L^{r'}(I\times\Omega)} \overset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{9.18}$$

Die Kompaktheit von F zeigt man analog mittels der Kompaktheit der Einbettung

$$\mathbf{W} \hookrightarrow\hookrightarrow L^r(I \times \Omega),\ 1 \le r < 10/3.$$

Damit folgt die zweite Behauptung. Die dritte Behauptung folgt schließlich ebenfalls aus der Abschätzung (9.18). Damit ist die Proposition bewiesen. □

Wir haben nun endlich alle notwendigen technischen Hilfsmittel zusammen, um das Existenzresultat für die nichtlineare Wärmeleitungsgleichung (9.1 formulieren zu können.

Theorem 9.19 (Nichtlineare Wärmeleitungsgleichung: Existenz)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und sei $I = (0,T)$, $T < \infty$, ein endliches Zeitintervall. Die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle für ein $1 \leq r < 10/3$ die Wachstumsbedingung

$$|f(x)| \leq c\,(1 + |x|^{r-1}).$$

Dann existiert für alle $u_0 \in L^2(\Omega)$ eine Lösung

$$u \in \boldsymbol{W} = W^{1,2,2}(I, W_0^{1,2}(\Omega), W_0^{1,2}(\Omega)^*)$$

der nichtlinearen Wärmeleitungsgleichung (9.1). Das heißt für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(I)$ und $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt

$$-\int_I (u(t), v)_{L^2(\Omega)} \partial_t \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_I \langle Au(t), v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \langle \tilde{F}u(t), v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \tag{9.20}$$

und die Identität $u(0) = u_0$ ist in $L^2(\Omega)$ erfüllt.

Bemerkung 9.21
Die schwache Formulierung der nichtlinearen Wärmeleitungsgleichung in (9.20), ist äquivalent zu nichtlinearen Operatordifferentialgleichung

$$d_t u + Au = Fu \ \textit{in} \ \big(L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega))\big)^*$$

9.3 Approximationssysteme

Wie angekündigt, wollen wir den Existenzsatz in mehrere Schritte aufteilen und eine Kombination von Linearisierungs- und Kompaktheitsnethoden verwenden. Der erste Schritt besteht hierbei in einer geeigneten Linearisierung des Problems. Eine naheliegende Idee wäre, Gleichung (9.1) zunächst um eine feste Funktion $\xi \in L^r(I \times \Omega)$ zu linearisieren und dann die schwache Form des linearen Problems

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f(\xi) && \text{in } I \times \Omega, \\ u &= 0 && \text{in } I \times \partial\Omega, \\ u(0) &= u_0 && \text{in } \Omega \end{aligned}$$

zu lösen, das heisst, analog zu unserem elliptischen Beispiel vorzugehen. Rechnet man für diesen Zugang die Details durch, bekommt man spätestens beim Versuch, die Voraussetzungen für den Schauderschen Fixpunktsatz zu prüfen, Schwierigkeiten, gleichmäßige

Abschätzungen für die zur Linearisierung gehörende schwache Lösung zu erhalten. Insbesondere findet man keine Kugel $B_R(0) \subset L^r(I \times \Omega)$, so dass der Lösungsoperator $T : \xi \mapsto u$, zu einer Selbstabbildung

$$T : B_R(0) \to B_R(0)$$

wird. Der Grund für diese Schwierigkeit ist in der im Vergleich zum elliptischen Beispiel komplexeren Struktur der Nichtlinearität begründet.
Zur Lösung des eben skizzierten Problems wählen wir eine einfache Methode um gleichmäßige Abschätzungen zu erzwingen: Wir schneiden die Nichtlinearität f geeignet ab. Der Preis, den wir dafür bezahlen müssen, ist eine weitere Approximationsstufe auf dem Weg zum endgültigen Existenzresultat in Theorem 9.19.

9.3.1 L^∞-Approximation von f

Das eben erwähnte Abschneiden der Nichtlinearität funktioniert folgnedermaßen: Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$f_k(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } |f(x)| < k, \\ k\,\frac{f(x)}{|f(x)|}, & \text{falls } |f(x)| \geq k. \end{cases} \tag{9.22}$$

Die Eigenschaften von f_k fassen wir in dem folgenden Lemma, dessen Beweis sich direkt aus den Eigenschaften von f ergibt, zusammen.

Lemma 9.23 (Eigenschaften von f_k)
Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\xi \in L^r(\Omega)$ gilt $f_k(\xi) \in L^\infty(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)^*$ und

$$|f_k(\xi)| \leq |f(\xi)| \leq c\,(1 + |\xi|^{r-1}).$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{F}_k &: L^r(\Omega) \to L^{r'}(\Omega), \\ \langle \tilde{F}_k\, \xi, v\rangle_{L^r(\Omega)} &:= \int_\Omega f_k(\xi) u \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

ist stetig und beschränkt und induziert eine stetige und beschränkte Abbildung

$$\begin{aligned} F_k &: L^r(I \times \Omega) \to L^{r'}(I \times \Omega), \\ \langle F_k\, \xi, v\rangle_{L^r(I\times\Omega)} &:= \int_I \langle \tilde{F}_k\, \xi(t), v(t)\rangle_{L^r(\Omega)} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Wegen $L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(I, L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^r(I, L^r(\Omega)) \cong L^r(I \times \Omega)$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$F_k : L^r(I \times \Omega) \to \big(L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(I, L^2(\Omega))\big)^*. \tag{9.24}$$

stetig und beschränkt.

9.3.2 Abgeschnittenes, linearisiertes Problem: Existenz und Eindeutigkeit

Mit Hilfe der L^∞-Approximation $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von f können wir in unserem ursprünglichen Problem zunächst f durch f_k ersetzen. Linearisieren wir zusätzlich in f_k mittels $\xi \in L^r(I\times\Omega)$, so erhalten wir in der ersten Approximationsstufe das in u lineare Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f_k(\xi) && \text{in } I\times\Omega, \\ u &= 0 && \text{in } I\times\partial\Omega, \\ u(0) &= u_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned} \tag{9.25}$$

Lemma 9.26 (Abgeschnittenes, linearisiertes Problem: Existenz und Eindeutigkeit) *Für alle $k\in\mathbb{N}$ und alle $\xi\in L^r(I\times\Omega)$* ***existiert eine eindeutige*** *schwache Lösung von (9.25). Das heisst, es existiert eine eindeutige Funktion $u\in\boldsymbol{W}$, so dass die zu (9.25) gehörende schwache Formulierung*

$$-\int_I (u(t),\eta_t(t))_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t + \int_I \langle Au(t),\eta(t)\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}t = \int_I \langle \tilde F_k\,\xi(t),\eta(t)\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}t \tag{9.27}$$

für alle Testfunktionen $\eta\in C_0^\infty(I,W_0^{1,2}(\Omega))$ erfüllt ist, und

$$u(0)=u_0 \text{ in } L^2(\Omega)$$

gilt. Außerdem gilt für alle $s\in\bar I$

$$\frac12\,\|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac12\,\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_0^s \langle \tilde F_k\,\xi(t),u(t)\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}t - \int_0^s \langle Au(t),u(t)\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}t \tag{9.28}$$

und es existiert eine Konstante $c(k)$ mit

$$\max_{t\in\bar I}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega))} \le c(k) \tag{9.29}$$

Beweis. Wegen $f_k(\xi)\in L^2(I,L^2(\Omega))$ folgt die Existenz von $u\in\mathbf{W}$ mit den behaupteten Eigenschaften direkt aus dem Existenzsatz für die lineare Wärmeleitungsgleichung, den wir mittels Galerkin-Approximation bewiesen hatten. Testen wir die zu (9.27) äquivalente Operatordifferentialgleichung

$$d_t u + Au = F_k\,\xi \text{ in } \big(L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega))\big)^*$$

mit der Lösung $u\in\mathbf{W}$ selbst, so folgt die Identität (9.28) aus der partiellen Integrationsformel. Die Abschätzung (9.29) wiederum ergibt sich aus (9.28) unter Benutzung der Tatsache, dass

$$|f_k(\xi)| \le k \text{ fast überall in } I\times\Omega$$

gilt und der Young-Ungleichung mit ε.
Wir zeigen noch die Eindeutigkeit der schwachen Lösung u. Seien dazu $(u_0^i, \xi_i)_{i=1,2} \in L^2(\Omega) \times L^r(I \times \Omega)$ gegebene Daten und $u_1, u_2 \in \mathbf{W}$ zugehörige Lösungen. Ziehen wir die entsprechenden schwachen Formulierungen voneinander ab und testen die Differenz mit $u_1 - u_2$ so liefert die partielle Integrationsformel für alle Zeiten $s \in \bar{I}$ die Identität

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u_1(s) - u_2(s)\|^2_{L^2(\Omega)} &+ \int_0^s \langle Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\|u_0^1 - u_0^2\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^s \langle \tilde{F}_k\,\xi_1 - \tilde{F}_k\,\xi_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Da A linear ist gilt aber

$$\begin{aligned} &\int_0^s \langle Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^s \langle A(u_1(t) - u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}t \\ &= \|u_1 - u_2\|_{L^2(0,s;W_0^{1,2}(\Omega))} \end{aligned}$$

Weegen der Einbettung $\mathbf{W} \hookrightarrow L^r(I \times \Omega)$ und (9.29) ist

$$\Big|\int_0^s \langle \tilde{F}_k\,\xi_1 - \tilde{F}_k\,\xi_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}t\Big| \le c(k)\|F_k\,\xi_1 - F_k\,\xi_2\|_{L^{r'}(I\times\Omega)}.$$

Da $s \in \bar{I}$ beliebig war, folgt aus diesen Abschätzungen schließlich für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \max_{s\in\bar{I}} \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Omega)} &+ \|u_1 - u_2\|_{L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega))} \\ &\le c(k)\big(\|u_0^1 - u_0^2\|^2_{L^2(\Omega)} + \|F_k\,\xi_1 - F_k\,\xi_2\|_{L^{r'}(I\times\Omega)}\big). \end{aligned}$$

Zusammen mit der Stetigkeit von F_k ergibt diese Abschätzung die Eindeutigkeit der schwachen Lösung. □

Bemerkung 9.30
Die Eindeutigkeit der schwachen Lösung in Lemma 9.26 kann man alternativ auch direkt aus der Linearität des Problems einsehen.

9.3.3 Fixpunktargument und abgeschnittenes Problem

Aus Lemma 9.26 folgt, dass der Lösungsoperator des abgeschnittenen, linearisierten Problems (9.25),

$$\begin{aligned} T_k : L^r(I \times \Omega) &\to L^r(I \times \Omega), \\ \xi &\mapsto T_k\,\xi = u, \end{aligned}$$

wobei $u \in \mathbf{W} \hookrightarrow L^r(I \times \Omega)$ die eindeutige schwache Lösung von (9.25) bezeichnet, wohldefiniert ist. Mithin liefert die a-priori Abschätzung (9.29) eine Konstante $c(k) > 0$, so dass T_k die abgeschlossene, beschränkte, konvexe Menge

$$B_k := \left\{ \xi \in L^r(I \times \Omega) \,\middle|\, \|\xi\|_{L^r(I\times\Omega)} \leq c(k) \right\} \tag{9.31}$$

in sich selbst abbildet. Um nun mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes auf die Existenz eines Fixpunktes der Abbildung T_k schließen zu können, benötigen wir

Proposition 9.32 (Kompaktheit von T_k)
Für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ ist der Lösungsoperator T_k kompakt.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Kompaktheit von T_k. Sei dazu $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_k$ eine Folge von Linearisierungen mit zugehörigen schwachen Lösungen $u_n = T_k\, \xi_n$, das heisst für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt für festes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d_t u_n + A u_n &= F_k\, \xi_n \text{ in } \left(L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega))\right)^*, \\ u_n(0) &= u_0 \qquad \text{in } L^2(\Omega), \end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, dass eine Teilfolge von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark in $L^r(I \times \Omega)$ konvergiert. Dazu stellen wir zunächst fest, dass die a-priori Abschätzung (9.29)

$$\max_{t\in\bar{I}} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|_{L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega))} \leq c(k) \tag{9.33}$$

unabhängig von n gilt. Daraus schließen wir außerdem, dass gleichmäßig in $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\|d_t u_n\|_{(L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega)))^*} = \|F_k\, \xi_n - A u_n\|_{(L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega)))^*} \leq 2\, c(k).$$

Damit ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathbf{W}$. Folgerung 9.15 liefert dann aber die Existenz einer in $L^r(I \times \Omega)$ stark konvergenten Teilfolge von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Der Operator T_k bildet also beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen ab.
Um die Stetigkeit von T_k nachzuweisen sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_k$ eine Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi \text{ in } L^r(I \times \Omega).$$

Analog zum Kompaktheitsteil des Beweises können wir wieder folgern, dass die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die folgenden gleichmäßigen Abschätzungen erfüllt:

$$\max_{t\in\bar{I}} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|_{L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega))} \leq c(k) \tag{9.34}$$

$$\|d_t u_n\|_{(L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega)))^*} \leq c(k). \tag{9.35}$$

Nach Übergang zu einer Teilfolge $(u_{n_l})_{l\in\mathbb{N}} \subset (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ können wir in der Identität

$$\begin{aligned} d_t u_{n_l} + A u_{n_l} &= F_k\, \xi_{n_l} \text{ in } \left(L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega))\right)^*, \\ u_{n_l}(0) &= u_0 \qquad \text{in } L^2(\Omega), \end{aligned}$$

zum Grenzwert $l \to \infty$ übergehen, um für festes $k \in \mathbb{N}$ die Gleichheit

$$\begin{aligned} d_t u + Au &= F_k\, \xi \text{ in } \big(L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega))\big)^*, \\ u_* &= u_0 \quad \text{in } L^2(\Omega), \end{aligned}$$

zu erhalten, wobei $u \in \mathbf{W}$ den schwachen Grenzwert der Folge $(u_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ und u_* den schwachen Grenzwert der Folge $(u_{n_l}(0))_{l\in\mathbb{N}}$ im $L^2(\Omega)$ bezeichnet. Man beachte, dass wir hierzu sowohl die Stetigkeit von F_k als auch die schwache Stetigkeit der linearen Operatoren A und d_t ausnutzen. Analog zum Beweis der Konvergenz des Galerkinverfahrens im Kapitel über die lineare Wärmeleitungsgleichung, können wir wieder mit Hilfe der partiellen Integrationsformel die Gültigkeit der Identität

$$u_* = u(0) = u_0$$

rechfertigen. Die Kombination von (9.34) mit dem Lemma von Aubin-Lions, liefert uns dann

$$\lim_{l\to\infty} u_{n_l} = \lim_{l\to\infty} T_k\, \xi_{n_l} = u = T_k\, \xi \text{ in } L^r(I \times \Omega).$$

Das übliche Teilfolgenargument zeigt schließlich

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} T_k\, \xi_n = u = T_k\, \xi \text{ in } L^r(I \times \Omega).$$

□

Da $T_k : B_k \to B_k$ kompakt ist, liefert der Schaudersche Fixpunktsatz nun die Existenz einer Funktion $u_k \in B_k$ mit $T_k u_k = u_k$. Insbesondere ist u_k eine schwache Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \partial_t u_k - \Delta u_k &= f_k(u_k) \text{ in } I \times \Omega, \\ u_k &= 0 \qquad\;\; \text{in } I \times \partial\Omega, \\ u_k(0) &= u_0 \qquad \text{in } \Omega, \end{aligned} \tag{9.36}$$

was wir äquivalent auch durch die Operatordifferentialgleichung

$$\begin{aligned} d_t u_k + Au_k &= F_k\, u_k \text{ in } \big(L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega))\big)^*, \\ u_k(0) &= u_0 \qquad \text{in } L^2(\Omega), \end{aligned} \tag{9.37}$$

ausdrücken können. Diese Tatsache, sowie die Eigenschaften von u_k halten wir in der folgenden Proposition fest.

Proposition 9.38 (Abgeschnittenes Problem: Existenz)
Für alle $k \in \mathbb{N}$ ***existiert*** *eine schwache Lösung von (9.36). Das heisst, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Funktion $u_k \in \boldsymbol{W}$ existiert, so dass*

$$-\int_I (u_k(t), \eta_t(t))_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t + \int_I \langle A u_k(t), \eta(t)\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}t = \int_I \langle \tilde{F}_k\, u_k(t), \eta(t)\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}t \tag{9.39}$$

für alle Testfunktionen $\eta \in C_0^\infty(I, W_0^{1,2}(\Omega))$ erfüllt ist, und

$$u(0) = u_0 \text{ in } L^2(\Omega)$$

gilt. Außerdem gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $s \in \bar{I}$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\,\|u_k(s)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\,\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\qquad = \int_0^s \langle \tilde{F}_k\, u_k(t), u_k(t)\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}t - \int_0^s \langle A u_k(t), u_k(t)\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{9.40}$$

und es existiert eine Konstante c mit

$$\max_{t \in \bar{I}} \|u_k(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_k\|_{L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega))} \le c \tag{9.41}$$

Bemerkung 9.42
Man beachte, dass wir in Proposition 9.38 ohne zusätzliche Annahmen über die Nichtlinearität f nur noch die Existenz einer schwachen Lösung garantieren können. Der Schaudersche Fixpunktsatz sagt nichts über die Eindeutigkeit des Fixpunktes aus. Ist der von f_k induzierte Operator F_k aber etwa ***monoton****, so kann man zeigen, dass die schwache Lösung des nichtlinearen Problems (9.36) eindeutig ist.*

Beweis. Für festes $k \in \mathbb{N}$ folgt die Existenz einer Funktion $u_k \in \mathbf{W}$, die (9.37) erfüllt, aus der zweiten Variante des Schauderschen Fixpunktsatzes und der Definition des Operators T_k. Wegen $u_k \in \mathbf{W} \hookrightarrow L^r(I \times \Omega)$ ist der Term

$$\int_I \langle \tilde{F}_k\, u_k(t), u_k(t)\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}t$$

wohldefiniert und wir erhalten (9.40) indem wir (9.37) mit u_k selbst testen und die partielle Integrationsformel verwenden. Aus (9.40) ergibt sich dann auch leicht die von $k \in \mathbb{N}$ unabhängige Abschätzung (9.41). Dazu definieren wir zunächst Mengen

$$\begin{aligned} Q_k &:= I \times \Omega \cap \big\{\, |f(u_k)| < k \,\big\}, \\ Q_k^c &:= I \times \Omega \cap \big\{\, |f(u_k)| \ge k \,\big\}. \end{aligned}$$

Aus der Definition der abgeschnittenen Funktion f_k, sowie der Koerzivitätsbedingung an f folgt dann

$$\begin{aligned}\int_I \langle \tilde{F}_k\, u_k(t), u_k(t)\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,\mathrm{d}t &= \int_I \int_\Omega f_k(u_k)u_k\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int_{Q_k} f_k(u_k)u_k\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{Q_k^c} f_k(u_k)u_k\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\overset{(9.22)}{=} \int_{Q_k} f(u_k)u_k\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{Q_k^c} k\,\frac{f(u_k)u_k}{|f(u_k)|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \overset{(9.5)}{\leq} 0,\end{aligned}$$

so dass (9.40) schließlich (9.41) impliziert. □

9.4 Grenzübergang

Die wesentliche Schwierigkeit beim Grenzübergang $k \to \infty$ in (9.37) ist die Identifikation des Grenzwerts $\lim_{k\to\infty} F_k u_k$ in $L^{r'}(I, L^{r'}(\Omega))$.
Es gilt nun aber zunächst einerseits die gleichmäßige Abschätzung

$$\max_{t\in\bar{I}} \|u_k(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_k\|_{L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega))} \leq c. \tag{9.43}$$

Andererseits folgt daraus, der trivialen Abschätzung $|f_k(u_k)| \leq |f(u_k)|$ und der Beschränktheit des induzierten Operators

$$F : L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(I, L^2(\Omega)) \to \left(L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega))\right)^*$$

mit Hilfe der Operatordifferentialgleichung (9.37) auch, dass gilt

$$\|d_t u_k\|_{(L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega)))^*} = \|F_k\, u_k - Au_k\|_{(L^2(I,W_0^{1,2}(\Omega)))^*} \leq 2\,c.$$

Mithin ist $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathbf{W}$. Folgerung 9.15 liefert daher eine Teilfolge $(u_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} \subset (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass gilt

$$\lim_{l\to\infty} u_{k_l} = u \text{ in } L^r(I, L^r(\Omega)),$$

wobei u den schwachen Grenzwert der in $L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(I, L^2(\Omega))$ beschränkten Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnet. Wir werden nun zeigen, dass aus den oben abgleiteten Konvergenzen, die starke Konvergenz

$$\lim_{l\to\infty} F_{k_l} u_{k_l} = Fu \text{ in } L^{r'}(I, L^{r'}(\Omega)).$$

Es gilt

$$\|Fu - F_{k_l} u_{k_l}\|_{L^{r'}(I,L^{r'}(\Omega))} \leq \|Fu - Fu_{k_l}\|_{L^{r'}(I,L^{r'}(\Omega))} + \|Fu_{k_l} - F_{k_l} u_{k_l}\|_{L^{r'}(I,L^{r'}(\Omega))},$$

und wegen der Stetigkeit von F verschwindet der erste Summand für $l \to \infty$. Für den zweiten Summand berechnen wir

$$\begin{aligned}\|Fu_{k_l} - F_{k_l}u_{k_l}\|^{r'}_{L^{r'}(I,L^{r'}(\Omega))} &= \int_I \int_\Omega |f_{k_l}(u_{k_l}) - f(u_{k_l})|^{r'} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int_{Q_{k_l}} |f_{k_l}(u_{k_l}) - f(u_{k_l})|^{r'} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{Q^c_{k_l}} |f_{k_l}(u_{k_l}) - f(u_{k_l})|^{r'} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int_{Q^c_{k_l}} |f_{k_l}(u_{k_l}) - f(u_{k_l})|^{r'} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

wobei wir die Definition der Menge Q_{k_l} benutzt haben. Desweiteren gilt dann aber wegen der Wachstumsbedingung (9.4) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_{Q^c_{k_l}} |f_{k_l}(u_{k_l}) - f(u_{k_l})|^{r'} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t &\leq c \int_{Q^c_{k_l}} |f(u_{k_l})|^{r'} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\leq c \int_{Q^c_{k_l}} \left(1 + |u_{k_l}|^{r-1}\right)^{r'} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\leq c \int_{Q^c_{k_l}} 1 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + c \int_{Q^c_{k_l}} |u_{k_l}|^r \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Aus der Chebychev-Ungleichung folgt

$$|Q^c_{k_l}| \leq \frac{\|f(u_{k_l})\|_{L^{r'}(I,L^{r'}(\Omega))}}{k_l^{r'}} \leq \frac{c}{k_l^{r'}} \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

und daher

$$c \int_{Q^c_{k_l}} 1 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = c\,|Q^c_{k_l}| \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wegen $\lim l \to \infty u_{k_l} = u$ in $L^r(I, L^r(\Omega))$ verschwindet auch das übrige Integral, denn

$$c \int_{Q^c_{k_l}} |u_{k_l}|^r \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq c \int_{Q^c_{k_l}} |u_{k_l} - u|^r \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + c \int_{Q^c_{k_l}} |u|^r \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Der Grenzübergang $l \to \infty$ in der Identität

$$\begin{aligned} d_t u_{k_l} + Au_{k_l} &= F_{k_l}\, u_{k_l} \text{ in } \left(L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega))\right)^*, \\ u_{k_l}(0) &= u_0 \qquad \text{in } L^2(\Omega), \end{aligned} \tag{9.44}$$

liefert zunächst

$$\begin{aligned} d_t u + Au &= Fu \text{ in } \left(L^2(I, W_0^{1,2}(\Omega))\right)^*, \\ u_* &= u_0 \;\text{ in } L^2(\Omega). \end{aligned} \tag{9.45}$$

Mit Hilfe der partiellen Integrationsformel können wir jedoch wieder die Gültigkeit der Identität

$$u_* = u(0) = u_0 \text{ in } L^2(\Omega)$$

rechtfertigen, so dass u schließlich eine schwache Lösung von (9.1) im Sinne von Theorem 9.19 ist.

Literaturverzeichnis

[BF13] Franck Boyer and Pierre Fabrie, *Mathematical tools for the study of the incompressible navier-stokes equations and related models*, Applied mathematical sciences, vol. 183, Springer, New York; Heidelberg; London [u.a.], 2013 (eng).

[Bré11] Haïm Brézis, *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Mathematics, Springer, New York; Heidelberg [u.a.], 2011 (eng).

[Els09] Jürgen Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, 6. ed., Springer-Lehrbuch, Grundwissen Mathematik, Springer, Berlin; Heidelberg [u.a.], 2009 (ger).

[GGZ74] Herbert Gajewski, Konrad Gröger, and Klaus Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Mathematische Lehrbücher und Monographien /2, vol. 38, Akad.-Verl., Berlin, 1974 (ger).

[Růž04] Michael Růžička, *Nichtlineare Funktionalanalysis: eine Einführung*, Springer, Berlin; Heidelberg [u.a.], 2004 (ger).

[Sim87] Jacques Simon, *Compact sets in the space $L^p(I, B)$*, Ann. Math. Pure Appl **146** (1987), 65–96 (eng).

[Wlo82] Joseph Wloka, *Partielle Differentialgleichungen: Sobolevräume und Randwertaufgaben; mit 99 Aufgaben und zahlreichen Beispielen*, Mathematische Leitfäden, Teubner, Stuttgart, 1982 (ger).

[Yos80] Kôsaku Yoshida, *Functional analysis*, 6. ed., Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, vol. 123, Springer, Berlin; Heidelberg [u.a.], 1980 (eng).