Prof. Dr. Michael Růžička, Sarah Eckstein 11.01.2016

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2015/16 — Blatt 10

Abgabe: Montag, den 18. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 : **2 Punkte**

Sei $u \in L^p(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$. Der Differenzenquotient $\Delta_i^h u$ ist definiert durch

$$\Delta_i^h u(x) := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} \quad x \in \Omega' \subset\subset \Omega \text{ mit } |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega).$$

Zeigen Sie für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $|h| < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\varphi, \partial\Omega)$:

$$\int_\Omega \Delta_i^h u \varphi dx \;=\; -\int_\Omega u \Delta_i^{-h} \varphi dx.$$

Aufgabe 2 : **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und polygonal berandet und seien $a \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $a > 0$ in Ω und $f \in L^2(\Omega)$ gegeben. Außerdem sei $\mathcal{T}_h$ eine zulässige Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $X_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) \big| v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\}$.

a) Zeigen Sie, dass eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von $-\operatorname{div}(a\nabla u) = f$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$ existiert. (Was ist die schwache Formulierung?)

b) Sei $u_h \in X_h \cap H_0^1(\Omega)$ die diskrete Lösung des Problems aus Teil a). Zeigen Sie, dass es eine Funktion $\overline{a} : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\overline{a}|_T$ konstant gibt, so dass

$$\int\limits_\Omega \overline{a} \nabla u_h \nabla \varphi_h dx = \int\limits_\Omega f \varphi_h dx \qquad \text{für alle } \varphi_h \in X_h \cap H_0^1(\Omega).$$

Aufgabe 3 : **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, beschränktes Normalgebiet und seien $f \in L^2(\Omega)$, $a \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Außerdem sei $u \in H^1(\Omega)$ so, dass für alle $\varphi \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int\limits_\Omega u a \cdot \nabla \varphi dx = \int\limits_\Omega f \varphi dx.$$

Formulieren Sie das zugehörige klassische Problem inklusive der vorzugebenden Randbedingungen.

Aufgabe 4 : **10 Punkte**

Sei A ein nichtleerer, abgeschlossener Teilraum eines Hilbertraumes H. mit $A^\perp$ bezeichnen wir das orthogonale Komplement von A, d.h. $A^\perp = \{x \in H \,|\, x \perp A\}$. Dabei heißt $x \perp A$, dass $(x, a) = 0$ für alle $a \in A$.

a) Zeigen Sie, dass $A^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von H ist.

b) Wir definieren die orthogonale Projektion $P : H \to A$ durch die Bedingung

$$\|x - Px\| = \min_{y \in A} \|x - y\| \qquad \text{für alle } y \in A.$$

Zeigen Sie, dass P existiert und eindeutig bestimmt ist. Tipp: Wenden Sie das Dirichletsche Prinzip auf ein geeignetes Funktional an.

c) Zeigen Sie, dass

$$(Px, y) = (x, y) \qquad \text{für alle } y \in A,$$

also $x - Px \perp A$.

d) Zeigen Sie, dass P linear und stetig ist und dass für $A \neq \{0\}$ gilt $\|P\|_{L(H,H)} = 1$.

e) Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in H$ genau eine Darstellung $x = y + z$ gibt mit $y \in A$ und $z \in A^\perp$.