Prof. Dr. Michael Růžička, Sarah Eckstein 18.01.2016

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2015/16 — Blatt 11

Abgabe: Montag, den 25. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 : **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie, dass

$$\|v\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} = \|v - \fint_\Omega v\,dx\|_{H^1(\Omega)}$$

gilt. *Tipp*: Projektionssatz (Blatt 10, Aufgabe 4).

Aufgabe 2 (Neumann Problem): **10 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, konvex und beschränkt mit Lipschitz–Rand und sei $f \in L^2(\Omega)$. Die Funktion $u \in H^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung des Neumann-Problems

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \tag{NP}$$

falls $\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}x$ für alle $\varphi \in H^1(\Omega)$ gilt.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von (NP). Zeigen Sie, dass dann $\int_\Omega f\,\mathrm{d}x = 0$ gilt.

b) Sei $f \in L^2(\Omega)$ mit $\int_\Omega f\,\mathrm{d}x = 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass das Problem (NP) genau eine schwache Lösung besitzt. *Tipp*: Betrachten Sie den Raum $X = \{v \in H^1(\Omega) \big| \int_\Omega v dx = 0\}$.

Aufgabe 3 : **6 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei $f \in H^{-2}(\Omega) := (H_0^2(\Omega))^*$. Der Bilaplace ist definiert durch $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$. Eine Funktion $u \in H_0^2(\Omega)$ heißt schwache Lösung des Randwertproblems für die biharmonische Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

wenn für alle $\varphi \in H_0^2(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega \Delta u \Delta \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle.$$

Verwenden Sie den Satz von Lax-Milgram, um zu zeigen, dass (1) genau eine schwache Lösung hat. *Tipp*: Zeigen Sie $\int_\Omega (\Delta v)^2 dx = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega (\partial_i \partial_j v)^2 dx$ für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$ und verwenden Sie ohne Beweis:

$$H_0^2(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}}.$$

Bitte beachten Sie: Am 24. Januar endet die Anmeldefrist für die Studien- und Prüfungsleistungen!