Prof. Dr. Michael Růžička, Sarah Eckstein 25.01.2016

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2015/16 — Blatt 12

Abgabe: Montag, den 01. Februar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 : **5 Punkte**

Es seien die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram erfüllt mit $f \in X^*$. Zusätzlich sei die Bilinearform B symmetrisch, d.h. $B(x,y) = B(y,x)$ für alle $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass die Probleme

$$\exists\, u \in X \ : \ I(u) = \inf_{v \in X} I(v), \qquad I(v) := \frac{1}{2} B(v,v) - \langle f, v \rangle$$

und

$$\exists\, u \in X \ : \ \forall\, v \in X \ : \ B(u,v) = \langle f, v \rangle$$

äquivalent sind.

Bemerkung: Diese Aussage ist für nicht-symmetrische Bilinearformen im Allgemeinen falsch.

Aufgabe 2 (Produktregel für Differenzenquotienten) : **5 Punkte**

Seien $u \in H^{1,p}(\Omega)$ und $v \in H^{1,q}(\Omega)$ mit $1 \le p, q < \infty$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass $\Delta_i^h(uv) \in L^1(\Omega')$ für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ und

$$\Delta_i^h(uv) = u(\cdot + he_i)\Delta_i^h v + v \Delta_i^h u.$$

Aufgabe 3 : **7 Punkte**

Sei $I = (-2, 2) \subset \mathbb{R}$ und $f(x) = x$ gegeben.

a) Zeigen Sie $f \in L^2(I)$ mit $⨍_I f(x)dx = 0$. Geben Sie eine Lösung $u \in H^1(I)$ des Neumann-Problems $-\Delta u = f$ in I, $u'(-2) = u'(2) = 0$ an. Wählen Sie eine zusätzliche Bedingung, so dass u eindeutig bestimmt ist und geben Sie eine solche Lösung an.

b) Die zugehörige Triangulierung zur Gitterweite $h = 1$ sei gegeben durch $\mathcal{T}_h = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$ mit $T_1 = [-2, -1]$, $T_2 = [-1, 0]$, $T_3 = [0, 1]$ und $T_4 = [1, 2]$.
Sei $X_h := \left\{ v \in C^0(\bar{I}) \mid v_{|T} \in \mathbb{P}_1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h \right\}$. Bestimmen Sie die diskrete Lösung $u_h \in X_h$ des Neumann-Problems, indem Sie sich an dem in (4.8) und (4.9) vorgegebenen Verfahren orientieren.

Aufgabe 4 : **3 Punkte**

Sei H Hilbertraum mit der induzierten Norm $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$. Sei $B : H \times H \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, koerzive und beschränkte Bilinearform. Zeigen Sie, dass durch

$$|||u||| := (B(u,u))^{\frac{1}{2}}$$

eine äquivalente Norm gegeben ist. Zeigen Sie zunächst, dass $|||\cdot|||$ tatsächlich eine Norm auf H definiert.