Prof. Dr. Michael Růžička, Sarah Eckstein 09.11.2015

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2015/16 — Blatt 3

Abgabe: Montag, den 16. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Eindimensionale harmonische Funktionen): **4 Punkte**

Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und sei $g \in C([a,b])$ eine stetige Funktion.

a) Finden Sie eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

$$u \in C^2((a,b)) \cap C([a,b]),\ u'' = 0 \text{ in } (a,b),\ u(a) = g(a) \quad \text{und} \quad u(b) = g(b). \qquad (*)$$

b) Zeigen Sie, dass jede Funktion mit den Eigenschaften aus $(*)$ sowohl ihr Minimum als auch ihr Maximum auf dem Rand von (a,b) annimmt.

c) Folgern Sie, dass genau eine Funktion mit den Eigenschaften aus $(*)$ existiert.

d) Zeigen Sie, dass die Lösung von $(*)$ die Mittelwerteigenschaft besitzt, d.h. für alle $x_0 \in (a,b)$ und alle $\varepsilon > 0$ mit $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$ gilt

$$u(x_0) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Aufgabe 2 (Fortsetzung von Blatt 2, Aufgabe 2): **6 Punkte**

Sei $G := (0,\pi) \times (0,\pi)$ und $f \in C(\partial G)$. Gesucht wird eine Lösung $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ der Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{auf } G, \\ u &= f \quad \text{auf } \partial G. \end{aligned} \qquad (*)$$

Der Rand von G teilt sich auf in die vier Kanten $\Gamma_1, ..., \Gamma_4$

$$\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 := \{0\} \times (0,\pi) \cup \{\pi\} \times (0,\pi) \cup (0,\pi) \times \{0\} \cup (0,\pi) \times \{\pi\}.$$

a) Sei $f \in C(\partial G)$ so, dass $f \neq 0$ auf Γ_1 und $f = 0$ auf $\Gamma_2,\ \Gamma_3,\ \Gamma_4$. Konstruieren Sie eine Funktion u, die $(*)$ für dieses spezielle f löst. Tipp: Fourierkoeffizienten

b) Sei $f \in C(\partial G)$, so dass f in den vier Eckpunkten von ∂G Null ist. Konstruieren Sie mit Hilfe von Teil a) eine Lösung von $(*)$. Tipp: Δ ist ein linearer Operator.

c) Sei nun $f \in C(\partial G)$ beliebig. Finden Sie mit Teil b) eine Lösung von $(*)$.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei u harmonisch auf G.

a) Zeigen Sie, dass für alle Bälle $B = B_R(x) \subset G$ gilt

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{n}{R} \sup_{y \in \partial B} |u(y)|.$$

Tipp: Mittelwertgleichungen.

b) Sei $G' \subset\subset G$ und $d := \operatorname{dist}(G', \partial G)$. Zeigen Sie, dass für alle Multiindizes α gilt

$$\sup_{y \in G'} |\nabla^\alpha u(y)| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{d}\right)^{|\alpha|} \sup_{y \in G} |u(y)|.$$

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie: Ist $\int_{\mathbb{R}^n} u(x)^2 \, dx < \infty$, so ist $u \equiv 0$.
Hinweis: Harmonische Funktionen haben die Mittelwerteigenschaft.