Prof. Dr. Michael Růžička, Sarah Eckstein 16.11.2015

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2015/16 — Blatt 4

Abgabe: Montag, den 23. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 : **5 Punkte**

Für $u \in C(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}$ sei der finite Differenzen-Operator Δ_i^h definiert durch

$$\Delta_i^h u(x) := \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h},$$

wobei e_i den i-ten Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Ferner sei Δ_h definiert durch

$$\Delta_h u(x) := \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^{-h} \Delta_i^h u(x).$$

Zeigen Sie, dass $\Delta_h u$ konsistent von der Ordnung 2 ist, d. h. dass für $u \in C^4(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\partial^\alpha u\|_\infty < \infty$ für $|\alpha| \leq 4$ gilt

$$\|\Delta_h u - \Delta u\|_\infty \leq c(u)h^2,$$

wobei die Konstante $c(u)$ unabhängig von h ist.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

a) Zeigen Sie, dass $C^1([0,1])$ mit der $W^{1,2}$-Norm kein Banachraum ist, indem Sie ein Gegenbeispiel finden.

b) Wählen Sie a, $b \in \mathbb{R}$ geeignet und zeigen Sie, dass $C_0^1([a,b])$ mit der $W_0^{1,2}$-Norm kein Banachraum ist, indem Sie Ihr Gegenbeispiel aus Teil a) geeignet modifizieren.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Seien $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^2$ zwei Dreiecke mit genau einer gemeinsamen Kante, so dass

$$\operatorname{int}(T_1) \cap \operatorname{int}(T_2) = \emptyset.$$

Für $T := T_1 \cup T_2$ sei $u \in C^0\left(\overline{T}\right)$, so dass $u|_{T_i} \in C^1(T_i)$ für $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass $u \in H^{1,2}(T)$ gilt.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq 0, \\ 2, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass u auf keinem Intervall, das 0 enthält eine schwache Ableitung besitzt.

Aufgabe 5: **2 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet und sei $u \in C^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass u schwach differenzierbar ist und dass die klassische und die schwache Ableitung übereinstimmen.