Prof. Dr. Michael Růžička, Sarah Eckstein 23.11.2015

# Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2015/16 — Blatt 5

**Abgabe: Montag, den 30. November, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 1 :** **5 Punkte**

Seien $X$, $Y$ normierte Räume und sei $A : X \to Y$ ein linearer Operator. Zeigen Sie, dass die Aussagen

(i) $A$ ist stetig

(i) $A$ ist stetig in 0

(ii) $A$ ist beschränkt

äquivalent sind.

**Aufgabe 2:** **5 Punkte**

Sei $X$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass dann $X^*$ ein Banachraum ist.

**Aufgabe 3:** **5 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Seien $u, f \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $-\Delta u = f$ in $\Omega$. Zeigen Sie:

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

*Hinweis*: Betrachten Sie die Gleichung $\int (\Delta u)^2 dx = \int f^2 dx$.

**Aufgabe 4:** **5 Punkte**

Sei $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $C^1$-Rand. Sei $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $g \in W^{1,p'}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $fg \in W^{1,1}(\Omega)$ und dass für die schwache Ableitung gilt

$$\partial_i(fg) = (\partial_i f)g + f(\partial_i g),$$

für $i = 1, ..., n$.