Prof. Dr. Michael Růžička, Sarah Eckstein 21.12.2015

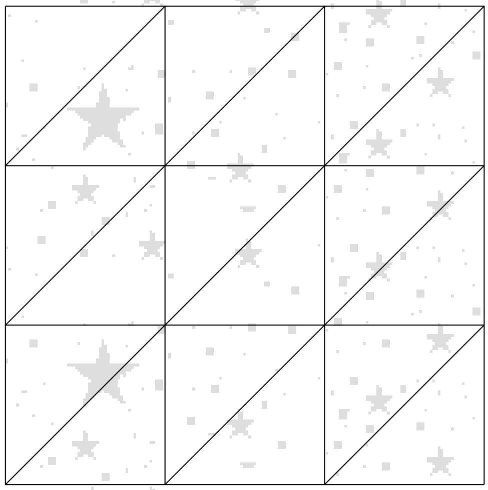
Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2015/16 — Blatt 9

Abgabe: Montag, den 11. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 : **8 Punkte**

(a) Betrachten Sie die folgende Triangulierung $\mathcal{T}_h$ des Gebiets $\Omega = (0,1)^2$:



Sei $V_h := \{v \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v_{|T} \in \mathbb{P}_1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\}$. Bestimmen Sie eine Basis von $V_h \cap H_0^1(\Omega)$.

(b) Bestimmen Sie $u_h \in V_h \cap H_0^1(\Omega)$ mit $\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h \,\mathrm{d}x = 2 \int_\Omega \varphi_h \,\mathrm{d}x$ für alle $\varphi_h \in V_h \cap H_0^1(\Omega)$.

Aufgabe 2 : **8 Punkte**

Sei $I = (-2,2)$ und die zugehörige Triangulierung zur Gitterweite $h = 1$ sei gegeben durch $\mathcal{T}_h = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$ mit $T_1 = [-2,-1]$, $T_2 = [-1,0]$, $T_3 = [0,1]$ und $T_4 = [1,2]$. Sei $V_h := \{v \in C^0(\overline{I}) \mid v_{|T} \in \mathbb{P}_1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\}$.

a) Bestimmen Sie eine Basis von $V_h \cap H_0^1(I)$ und zeichnen Sie die Basisfunktionen.

b) Bestimmen Sie $u_h \in V_h \cap H_0^1(I)$ mit $\int_I \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h \,\mathrm{d}x = 2 \int_I \varphi_h \,\mathrm{d}x$ für alle $\varphi_h \in V_h \cap H_0^1(I)$.

c) Bestimmen Sie die klassische Lösung $u \in C^2(I) \cap C^1(\overline{I})$ von

$$-u''(x) = 2 \text{ in } I, \qquad u(x) = 0 \text{ auf } \partial I$$

und berechnen Sie den Fehler $E := \|u - u_h\|_{H_0^1(I)}$.

d) Bestimmen Sie die Lagrangeinterpolierende $I_h u$ von u.

Aufgabe 3 : **4 Punkte**

Sei $\mathcal{T}_h$ eine zulässige Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Omega = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ und es gelte $\sigma(T) \leq \sigma$ und $c_1 h \leq h(T) \leq c_2 h$ für alle $T \in \mathcal{T}_h$. Weiter sei

$$X_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) \big| v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Zeigen Sie, dass eine Konstante c existiert, die unabhängig von h ist, so dass für alle $u_h \in X_h$ gilt

$$\|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^{-1}\|u_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Zusatzaufgabe : **4 Zusatzpunkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie, dass der Hölderraum $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1]$, ein Banachraum ist.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!