Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
T. Malkmus

19.10.2014

Praktische Übung zur Vorlesung

Einfühung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2015/16 — Blatt 1

Abgabe: Montag, den 26.10.2014, via Email an den Assistenten

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Wir betrachten die eindimensionale Poisson Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x) \quad \text{für } x \in [0,1] \\ u(x) &= g(x) \quad \text{für } x = 0, 1 \end{aligned}$$

für gegebene rechte Seite f und Rand Daten g.
Wir wählen eine Diskretisierung des Intervalls $[0,1]$: Zu gegebenem $N > 0$ sei $h = \frac{1}{N}$ und $x_i = ih, 1 \leq i \leq N$. Für $u_h, b_h \in \mathbb{R}^N$ und $A_h \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit

$$(A_h u_h)_i = \begin{cases} \frac{-u_{h,i-1}+2u_{h,i}-u_{h,i+1}}{h^2} & \text{für } 2 \leq i \leq N-1 \\ u_{h,i} & \text{für } i = 1, N \end{cases}$$

und

$$b_{h,i} = \begin{cases} f(x_i) & \text{für } 2 \leq i \leq N-1 \\ g(x_i) & \text{für } i = 1, N \end{cases}$$

lässt sich die Lösung der Poisson Gleichung u durch die Lösung $u_h \in \mathbb{R}^N$ der linearen Gleichung

$$A_h u_h = b_h \tag{1}$$

approximieren. Schreiben Sie ein Programm das System (1) löst. Implementieren Sie hierzu die Matrix-Vektor-Multiplikation $(A_h u_h)_i$ und ein Verfahren zum Lösen des linearen Gleichungssystems. Das Programm sollte darüber hinaus die Lösung u_h in ein Datei schreiben.
Testen Sie ihr Programm mit folgender rechten Seite und Rand Daten:

$$\begin{aligned} f(x) &= \pi^2 \sin(\pi x) \\ g(x) &= 0 \end{aligned}$$

für $N = \{10, 100, 200, 500, 1000\}$. Visualisieren Sie die Lösungen $u_{\frac{1}{N}}$ mittels Gnuplot.