Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička 02.11.2014
T. Malkmus

Praktische Übung zur Vorlesung

Einfühung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2015/16 — Blatt 3

Abgabe: Montag, den 16.11.2014, via Email an den Assistenten

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ polygonal berandet und durch ein Gitter $G = \{T_i | i = 1, ..., N\}$ mit Dreiecken konform trianguliert. Die Gitterweite h eines Gitters G ist definiert durch:

$$h = \max_{T \in G} h(T) \quad \text{ mit } h(T) = \max\{|v_i - v_j| : v_i, v_j \text{ Eckpunkte des Dreiecks } T\}$$

Die Knoten des Gitters, die Eckpunkte der Dreiecken, seien mit $p_i, i = 1, ..., M$ bezeichnet. Wir definieren auf diesem Gitter G den endlich dimensionalen Raum X_h durch

$$X_h = \{u \in C^0(\Omega) \mid u \text{ ist auf dem Dreieck } T \text{ in } \mathbb{P}^1, T \in G\}.$$

Eine Basis dises Raumes bilden die *Lagrangen Basisfunktionen* φ_i, sie sind eindeutig durch die Bedinung $\varphi_i(p_j) = \delta_{ij}$ bestimmt. Sei $u \in C^0(\bar{\Omega})$ gegeben. Die *Lagrange-Interpolierende* $I_h u \in X_h$ ist definiert durch

$$I_h u = \sum_{i=1}^{M} u_i \varphi_i(x) \quad \text{ mit } u_i = u(p_i)\ .$$

Die Funktion u und $I_h u$ stimmen an den Knoten des Gitters p_i überein. Bestimmen sie den $L^2(\Omega)$ Fehler

$$\|u - I_h u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u - I_h u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

zwischen der Funktion u und ihrer *Lagrange-Interpolierende* $I_h u$.
Der L^2 Fehler kann über eine Mittelpunksquadrature ausgerechnet werden. Implementieren Sie für diese Aufgabe Methoden oder Funktionen die:

- das Volumen eines Dreiecks berechnen,
- den Schwerpunkt eines Dreiecks berechenen und
- die Gitterweiter berechnen.

Interpolieren Sie die Funktionen u, v:

$$u(x, y) = sin(x)sin(y) \quad v(x, y) = \exp(-x^2 - y^2).$$

Untersuchen Sie für die Gitter 1,2,3 und 4 von der Praktikums Homepage das Verhalten der L^2 Fehler in Relation zur Gitterweiter. Stellen Sie einen Funktionellen Zusammenhang her.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $u_h \in X_h$ eine gegebene diskrete Funktion, z.B. die Lagrange-Interpolierende aus Aufgabe 1. Erweitern Sie die Methoden/Funktionen zum Schreiben des Gitters im VTK Format, so dass u_h in der selben Datei mit ausgegeben wird. Ändern Sie dazu Ihren Code, so dass zusätzlich der folgende Block mit geschrieben wird.

```
<?xml version="1.0"?>
<VTKFile type="UnstructuredGrid"
         version="0.1"
         byte_order="LittleEndian">
  <UnstructuredGrid>
    <Piece NumberOfPoints="4" NumberOfCells="2">
----------------------------Neu----------------------------
      <PointData Scalars="solution">
        <DataArray type="Float64"
                   NumberOfComponents="1"
                   Name="solution"
                   format="ascii">
          0.0 0.0 0.0 0.0
        </DataArray>
      </PointData>
----------------------------Neu----------------------------
      <Points>
        <DataArray type="Float64"
                   NumberOfComponents="3"
                   Name="Coordinates"
                   format="ascii">
          0.0 0.0 0.0
          1.0 0.0 0.0
          0.0 1.0 0.0
          1.0 1.0 0.0
        </DataArray>
---------------- Ab hier wie auf Blatt 2 ----------------
```

Wobei im *DataArray* Block die Auswertung der diskreten Funktion u_h and den Knotenpunkten p_i einzusetzten ist.