Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
T. Malkmus

14.12.2015

Praktische Übung zur Vorlesung

Einfühung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2015/16 — Blatt 7

Abgabe: Monatg, den 11.01.2016, via Email an den Assistenten

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ polygonal berandet und zulässig durch das Gitter $\mathcal{G}$ trianguliert. Weiter sei X_h der endlich dimensionale Raum auf dem Gitter $\mathcal{G}$ von Blatt 3, dessen Basisfunktionen durch $\varphi_i(p_j) = \delta_{ij}$ eindeutig bestimmt sind. Wir betrachten die *Reaktions-Diffusion-Gleichung* mit homogenen Neumann-Randwerten:

$$\begin{aligned} u - \lambda\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ \partial_\nu u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $\lambda > 0$ und ν äußere Normale an $\partial\Omega$. $u_h \in X_h$ heißt *schwache Lösung* der *Reaktions-Diffusion-Gleichung* falls gilt

$$\int_\Omega u_h\varphi_i + \lambda\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla\varphi_i = \int_\Omega f\varphi_i \qquad \text{für alle Basisfunktionen } \varphi_i \in X_h.$$

Die schwache Lösung $u_h \in X_h$ der *Reaktions-Diffusion-Gleichung* ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{j=0}^{M} u_i\Big(\underbrace{\int_\Omega \varphi_j\varphi_i}_{M_{ij}} + \lambda\underbrace{\int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i}_{S_{ij}}\Big) = \int_\Omega f\varphi_i \qquad \text{für } i = 0, ..., M$$

mit den Matrizen S_{ij}, der sogenannten *Steifigkeitsmatrix* und M_{ij}, der bekannten *Massenmatrix*. Berechnen Sie numerisch die schwache Lösung der Reaktions-Diffusion-Gleichung. Assemblieren Sie hierzu wie auf Blatt 5 die Matrix Einträge:

$$(M + \lambda S)_{ij} = \int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i + \lambda\int_\Omega \varphi_j\varphi_i$$

und rechte Seite $b_i = \int_\Omega f\varphi_i$ mithilfe einer Quadraturformel. Und lösen Sie anschließend das resultierende Gleichungssystem mit einem CG-Verfahren. Hinweis: Sie können unterschiedliche Quadraturformeln für die Massen- und Steifigkeitsmatrix verweden.

Testen Sie ihr Programm anhand der Funktion $u(x, y) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi y)$ und verschiedenen Werten von λ. Wie muss f aussehen damit u Lösung der Differentialgleichung ist?

Bestimmen Sie weiterhin den L^2 und H^1 Fehler der schwachen Lösung u_h.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Sei Ω, $\mathcal{G}$ und X_h wie in Aufgabe 1. Betrachten Sie das folgende Problem:

$$\begin{aligned} u - \lambda\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

zu gegebener Funktion g und $\lambda > 0$.
Ziel ist die Berechnung einer Approximation der schwachen Lösung $u_h = \sum_{i=1}^{M} u_i\varphi_i$ zu diesem Problem.
Folgendes Verfahren garantiert, dass die Randwerte *stark angenommen* werden: Sei $\{p_k\}$ die Menge der Gitterpunkte auf dem Rand des Gebietes, dann soll gelten:

$$u_h(p_k) = g(p_k) \quad \text{für alle } p_k \ .$$

Algorithmus:

(a) (*Assemblieren*) Stellen Sie die Massen- und Steifigkeitsmatrix auf:

$$(M + \lambda S)_{ij} = \int_\Omega \varphi_i\varphi_j + \lambda \int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j$$

sowie die rechte Seite:

$$b_i = \int_\Omega f\varphi_i$$

für $0 \leq i, j \leq M$.

(b) (*Anpassen*) Sei $\{p_k\}$ die Menge aller Randgitterpunkte.

$$A_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{falls } p_i \text{ ein Randgitterpunkt ist} \\ (M + \lambda S)_{ij} & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$b_i^* = \begin{cases} g(p_i) & \text{falls } p_i \text{ ein Randgitterpunkt ist} \\ b_i & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) (*Lösen*) Lösen Sie das linear Gleichungssystem:

$$AU = b^*$$

mithilfe des eines CG Verfahrens, verwenden sie

$$U = \begin{cases} g(p_k) & \text{für alle Randpunkte } p_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

als Startwert.

Implementieren Sie den obigen Algorithmus, hierzu müssen Sie die Menge aller Gitterpunkte auf dem Rand des Gebiets Ω betstimmen. Testen Sie ihr Programm anhand der Funktion $u(x, y) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi y)$ und $v(x, y) = x^2 - y^2$ und verschiedenen Werten von λ. Verwenden Sie $g = u$ als vorgegbene Randfunktion und bestimmen Sie weiterhin den L^2 und H^1 Fehler der schwachen Lösung u_h.