Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
T. Malkmus

18.01.2016

Praktische Übung zur Vorlesung

Einfühung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2015/16 — Blatt 9

Abgabe: Monatg, den 01.02.2016, via Email an den Assistenten

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Sei $\mathcal{T}_h$ eine zulässige Triangulierung von Ω. Gegeben sei weiter eine stetige koerzive Bilinearform $a : X \times X \to \mathbb{R}$ und $F \in X'$, $X = H^1(\Omega)$. Wir betrachten den endlich dimensionalen Raum:

$$X_h = \{u_h \in C^0(\Omega) \mid u_h|_T \in \mathbb{P}^2(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\}$$

Gesucht ist die numerische Approximation an $u_h \in X_h$ zu

$$a(u_h, \varphi) = F(\varphi) \qquad \text{für alle } \varphi \in X_h.$$

Ist eine Basis $\{\varphi_i\}$ von X_h gegeben, so lassen sich mit dem in der Vorlesung oder den Übungen vorgestellten Finite-Elemente-Verfahren die Koeffizienten u_i der Approximation $u_h(x) = \sum u_i \varphi_i(x)$ bestimmen. Im folgenden werden wir ein Basis des Raums X_h konstruieren.
Zu gegebenem Dreieck T, $x \in T$ sind die barizentrischen Koordinaten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ gegeben durch:

$$\lambda_0(x) = 1 - x_0 - x_1; \quad \lambda_1(x) = x_0; \quad \lambda_2(x) = x_1$$

Nodale Basis für $\mathbb{P}^2(\hat{T})$:
Durch die Bedingung $\hat{\varphi}_i(p_j) = \delta_{ij}$ für die Punkte

$$p_0 = (0,0)^T, \quad p_1 = (1,0)^T, \quad p_2 = 0,1)^T$$
$$p_3 = (0.5, 0.5)^T, \quad p_4 = (0, 0.5)^T, \quad p_5 = (0.5, 0.0)^T$$

ist ein nodale Basis für $\mathbb{P}^2(T)$ gegeben. In barizentrischen Koordinaten sind die 6 Basisfunktionen wie folgt:

$$\hat{\varphi}_i(x) = \begin{cases} \lambda_i(x)(2\lambda_i(x) - 1) & \text{für } i < 3 \\ 4\lambda_{(i+1)\%3}(x)\lambda_{(i+2)\%3}(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Nodale Basis für X_h:
Aus einer nodalen Basis auf dem Referenzelement $\hat{T}$ lässt sich wie folgt eine Basis für X_h konstruierten. Dazu sei $\{p_0, ..., p_{M-1}\}$ die Menge aller Eck- und Kantenmittelpunkte und

$$\nu_T : \{T\} \times \{0, ..., 5\} \to \{0, ..., M-1\}$$

eine gegebene Abbildung, dann ist $\{\varphi_i\}(i = 0, ..., M-1)$ eine Nodale Basis von X_h, die Basisfunktionen φ_i sind wie folgt:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & p_i \notin T \\ \hat{\varphi}_l(x) & p_i \in T, \nu_T(l) = i\ . \end{cases}$$

Die Abbildung ν_T ist gegeben durch:

$$\nu_T(l) = \begin{cases} \text{“Index von Eckpunkt } l \text{ in } T\text{“} & l < 3 \\ \text{“Index von Kante } l-3 \text{ in } T\text{“ + N} & \text{sonst} \end{cases}$$

mit N die Anzahl der Eckpunkte.
Implementieren Sie ein Finite-Elemente Verfahren für die Bilienarform $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ und $F(\varphi) = \int_\Omega f\varphi$ mit quadratischen Lagrange-Basisfunktionen. Hierzu müssen Sie die Auswertung von $\hat{\varphi}_i$ so wie des Gradienten dieser Basisfunktion als auch die Abbildung ν_T implementieren. Erweitern Sie dazu Ihre Gitterimplementierung, so dass jede Kante im Gitter mit einem Index versehen wird. Verwenden Sie zur Approximation der auftretenden Integrale folgende Quadraturpunkte und Gewichte:

$$x_0 = (4/6, 1/6)^T, x_1 = (1/6, 4/6)^T, x_2 = (1/6, 1/6)^T, \quad w_0 = w_1 = w_2 = 1/3$$

Testen Sie die Implementierung anhand der bisherigen Beispiele.
Hinweis: Die Gradienten der barizentrischen Koordinaten zeigen in negative Richtung der gegenüberliegenden äußeren Normalen.