Abteilung für Angewandte Mathematik 17.10.2016
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2016/2017 — Woche 1
Abgabe: Montag, den 24. Oktober, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: (Sobolevraum) **5 Punkte**

Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet. Zeigen Sie:

1. Der Sobolevraum $W^{1,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum mit der Norm

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

2. Für $1 < p < \infty$ ist $W^{1,p}(\Omega)$ reflexiv und separabel. Betrachten Sie hierzu die Abbildung

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to \Big(L^p(\Omega)\Big)^{n+1}, u \mapsto (u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u)$$

und rekapitulieren Sie, was Sie über Reflexivität und Separabilität wissen.

Aufgabe 2: (alternative Charakerisierung von $W^{1,p}$) **5 Punkte**

Sei $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Zeigen Sie die Äquivalenz von

1. $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
2. Es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und alle $i = 1, \dots, n$

$$\left| \int_\Omega u\, \partial_i \varphi \; dx \right| \leq c \, \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

gilt, wobei $p' = p/(p-1)$ der zu p konjugierte Exponent ist.