Abteilung für Angewandte Mathematik 24.10.2016
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2016/2017 — Woche 2

Abgabe: Montag, den 31. Oktober, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei T eine k-kontraktive Abbildung mit $0 < k < 1$ auf einem vollständigen metrischen Raum (X, d). Sei $x_0 \in X$ und $x_{n+1} := Tx_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Zeigen Sie, dass die folgenden Abschätzungen gelten:

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\leq \frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0), \\ d(x_{n+1}, x) &\leq \frac{k}{1-k}\, d(x_{n+1}, x_n), \\ d(x_{n+1}, x) &\leq k\, d(x_n, x). \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (Separation der Variablen) **5 Punkte**

Gegeben Sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

mit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t, x) = tx + x$ und $x_0 = 1$. Bestimmen Sie eine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Zeigen Sie:

a) $L(\mathbf{P}, \mathbf{z}, x) = \eta(\mathbf{z}) \det \mathbf{P}$ mit $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ist eine Null-Lagrangefunktion.

b) Für jede C^2-Funktion $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hängt

$$\int_\Omega \eta(\mathbf{u}) \det(\nabla \mathbf{u})\, dx$$

nur von $\mathbf{u}|_{\partial\Omega}$ ab. Hierbei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge mit glattem Rand.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Für $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei

$$L(\mathbf{P}) := tr(\mathbf{P}^2) - \Big(tr(\mathbf{P})\Big)^2,$$

wobei tr die Spur der Matrix bezeichnet. Zeigen Sie, dass L eine Null-Langrangefunktion ist.