Abteilung für Angewandte Mathematik 31.10.2016
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

# Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2016/2017 — Woche 3

**Abgabe: Montag, den 07. November, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 1:** **7 Punkte**

Seien $X, Y$ normierte Vektorräume mit $\dim X < \infty$, sei $M \subset X$ abgeschlossen und $T : M \subset X \to Y$ stetig. Zeigen Sie, dass $\overline{T(B)} = T(\overline{B})$ für alle beschränkten Mengen $B \subset M$ gilt. Folgern Sie damit, dass $T$ kompakt ist.

**Aufgabe 2:** **5 Punkte**

Sei $S$ ein kompakter, metrischer Raum und $Y$ ein Banachraum. Zeigen Sie, dass in dem Raum

$$C^0(S, Y) := \{u : S \to Y \mid u \text{ ist stetig}\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{C^0(S,Y)} := \sup_{s \in S} \|u(s)\|_Y$$

jede Cauchyfolge gegen ein Element aus $C^0(S, Y)$ konvergiert.

**Bemerkung:** Damit ist $(C^0(S, Y), \|\cdot\|_{C^0(S,Y)})$ ein Banachraum.

**Aufgabe 3:** **8 Punkte**

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f \in C(I \times I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in C(I, I)$. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Arzela-Ascoli, dass der Operator

$$\begin{aligned} F : C(I, \mathbb{R}^n) &\to C(I, \mathbb{R}^n), \\ u(\cdot) &\mapsto Fu(\cdot) := \int_a^{\varphi(\cdot)} f(\cdot, s, u(s))\, ds \end{aligned}$$

unter diesen Voraussetzungen kompakt ist.