Abteilung für Angewandte Mathematik 07.11.2016
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2016/2017 — Woche 4
Abgabe: Montag, den 14. November, vor der Vorlesung

Definition: Seien X, Y Banachräume. Mit $L(X, Y)$ bezeichen wir die Menge aller linearen, beschränkten Operatoren $A : X \to Y$. Dieser Raum ist, versehen mit der Norm

$$\|A\|_{L(X,Y)} := \sup_{x \in X,\, \|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y$$

ein Banachraum. Ein Operator $A \in L(X, Y)$ mit Bild $R(A)$ hat *endlichen Rang*, wenn $\dim R(A) < \infty$ gilt.

Aufgabe 1: **5 Punkte**
Sei X, Y Banachräume.

a) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X, Y)$ eine Folge kompakter Operatoren, die in $L(X, Y)$ gegen ein A konvergiert. Zeigen Sie, dass A kompakt ist.

b) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X, Y)$ eine Folge von Operatoren mit endlichen Rang, die in $L(X, Y)$ gegen ein A konvergiert. Zeigen Sie, dass A kompakt ist.

Tipp: Verwenden Sie eine geeignete Formulierung für die Kompaktheit.

Aufgabe 2: **5 Punkte**
Sei H ein Hilbertraum und seien H_n endlichdimensionale Teilräume. Sei weiter $P_n : H \to H_n$ der Projektionsoperator aus dem Projektionssatz. Zeigen Sie

$$\sup_{x \in H,\, \|x\|_H \le 1} \|x - P_n x\|_H \le 1.$$

Aufgabe 3: **5 Punkte**
Sei X ein Banachraum, H ein Hilbertraum und $A \in L(X, H)$ ein kompakter Operator. Zeigen Sie, dass eine Folge von Operatoren $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X, H)$ von endlichen Rang existiert, die in $L(X, H)$ gegen A konvergiert.

Tipp: Konstruieren Sie über die Kompaktheit geeignete Unterräume und verwenden Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

a) Sei $R > 0$ und gelte für $f \in C^0(\overline{B_R(0)}, \mathbb{R}^n)$ die Ungleichung $f(x) \cdot x \le |x|^2$ auf $\partial B_R(0)$. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat.

b) Für $f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gelte $\frac{f(x)\cdot x}{|x|} \to \infty$ für $|x| \to \infty$. Zeigen Sie, dass f surjektiv ist.