Abteilung für Angewandte Mathematik 14.11.2016
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2016/2017 — Woche 5
Abgabe: Montag, den 21. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **5 Punkte**
Sei $1 \leq p < \infty$, $S \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge und $D \subset X$ eine dichte Teilmenge eines Banachraumes X. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \phi_i \, d_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\, \phi_i \in C_0^\infty(S),\, d_i \in D \text{ für } i = 1, \ldots, n \right\}$$

dicht in $L^p(S, X)$ ist.

Tipp: Verwenden Sie die die (klassische) Dichtheit von $C_0^\infty(S)$ in $L^p(S)$.

Aufgabe 2: **7 Punkte**
Sei $1 \leq p < \infty$, X ein Banachraum und $S \subset \mathbb{R}$ mit $0 < |S| < \infty$ eine messbare Menge.

a) Folgern Sie mithilfe der Abbildung $x \mapsto |S|^{\frac{1}{p}} \chi_S(\cdot)\, x$ (für $x \in X$) aus der Separabilität von $L^p(S, X)$ die Separabilität von X.

b) Sei nun X separabel. Folgern Sie durch eine geeignete Konstruktion von Treppenfunktionen die Separabilität von $L^p(S, X)$.

Aufgabe 3: **3 Punkte**
Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $S \subset \mathbb{R}$ messbar. Zeigen Sie, dass der Bochner-Raum $L^p(S, \mathbb{R})$ mit dem klassischen Lebesgue-Raum $L^p(S)$ übereinstimmt, d. h. für alle $f \in L^p(S, \mathbb{R})$ bereits $f \in L^p(S)$ gilt bzw. für alle $f \in L^p(S)$ auch $f \in L^p(S, \mathbb{R})$ gilt.

Aufgabe 4: (Majorisierte Konvergenz von Lebesgue) **5 Punkte**
Sei $1 \leq p < \infty$, $S \subset \mathbb{R}$ eine messbare Menge und X ein Banachraum. Seien weiter $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(S, X)$, $g \in L^p(S, \mathbb{R})$ und gelte für ein $f : S \to X$

$$\begin{aligned} f_n(t) &\to f(t) && \text{in } X \text{ für fast alle } t \in S, \\ \|f_n(t)\|_X &\leq |g(t)| && \text{für fast alle } t \in S. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $f_n \to f$ in $L^p(I, X)$ gilt.

Bitte denken Sie daran, die Veranstaltung in HISinOne zu belegen.