Abteilung für Angewandte Mathematik 21.11.2016
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2016/2017 — Woche 6
Abgabe: Montag, den 28. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **3 Punkte**
Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $X := C^1([a,b])$, $W := C^0([a,b])$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : X \to W,\ f(y)(x) := y'(x) \qquad \text{für } x \in [a,b]$$

stetig Fréchet-differenzierbar ist.

Aufgabe 2: **6 Punkte**
Zeigen Sie, dass

1. die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ für alle $h \in \mathbb{R}^2$ eine Ableitung in Richtung h besitzt, aber nicht Gâteaux-differenzierbar ist.
2. die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0), \\ \left(\frac{x\,y^2}{x^2+y^4}\right)^2 & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$
Gâteaux-, aber nicht Fréchet-differenzierbar in $(0,0)$ ist.

Aufgabe 3: **5 Punkte**
Sei $T \in (0, \frac{\pi}{2})$. Zeigen Sie, dass für alle $f \in C^0([0,T])$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u'(t) - 2\,\tan(t)\,u(t) &= f(t) \qquad \text{für } t \in (0,T), \\ u(0) &= 0 \end{aligned}$$

genau eine Lösung $u \in C^1([0,T])$ besitzt.

Tipp: Verwenden Sie einen Exponentialansatz $u(t) = e^{-P(t)} \int_0^t e^{P(s)}\, f(s)\ ds$ für eine geeignete Funktion $P(t)$.

Aufgabe 4: (Implizite Funktionen) **6 Punkte**
Für festes $T \in (0, \frac{\pi}{2})$ definieren wir die mit ihren Standardnormen versehenen Räume $X = Z = C^0([0,T])$ und $Y = \{u \in C^1([0,T]) \,|\, u(0) = 0\}$. Zeigen Sie mithilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass das Problem

$$\begin{aligned} u' - u^2 - 1 &= f \qquad \text{in } (0,T) \\ u(0) &= 0 \end{aligned}$$

für jedes $f \in B_\varepsilon(0) \subset X$ genau eine Lösung $u = G(f) \in Y$ besitzt. Zeigen Sie außerdem $G \in C^1(B_\varepsilon(0), Y)$ und bestimmen Sie $G'(0)$.

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 3.