Abteilung für Angewandte Mathematik 28.11.2016
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2016/2017 — Woche 7
Abgabe: Montag, den 05. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mit der kanonischen Identifikation von $\mathbb{R}^*$ mit $\mathbb{R}$ fassen wir f als Abbildung zwischen $\mathbb{R}$ und seinen Dualraum auf, d. h. die duale Paarung ist durch $\langle f(u), v\rangle_{\mathbb{R}} = f(u) \cdot v$ gegeben. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ genau dann (strikt) monoton im Sinne der nichtlinearen Funktionalanalysis ist, wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (strikt) monoton wachsend im Sinne der Analysis I ist.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Seien X, Y Banachräume und sei X reflexiv sowie $T : X \to Y$ kompakt und linear. Zeigen Sie, dass T vollstetig ist.

Aufgabe 3: (Zarantonello) **6 Punkte**

Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(.,.)_H$. Es sei $A : H \to H^*$ ein Lipschitzstetiger, stark monotoner Operator. Sei weiter $j : H^* \to H$ die Riez'sche Abbildung, welche durch $(jf, h)_H = \langle f, h\rangle_H$ für $f \in H^*$ und $u \in H$ definiert ist. Zeigen Sie mithilfe der Abbildung $F_\varepsilon : H \to H$, $F_\varepsilon(u) := u + j(\varepsilon\, f - \varepsilon\, Au)$, dass A bijektiv ist.

Tipp: Denken Sie an den Banach'schen Fixpunktsatz.

Aufgabe 4: (Monotonie) **7 Punkte**

Sei $1 < p < \infty$. Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$g(u) := \begin{cases} |u|^{p-2}\, u & \text{für } u \neq 0, \\ 0 & \text{für } u = 0 \end{cases}$$

gegeben ist. Zeigen Sie:

a) Für $p > 1$ ist g strikt monoton.

b) Für $p \geq 2$ gilt $\langle g(u) - g(v), u - v\rangle_{\mathbb{R}} \geq c\, |u - v|^p$ für alle $u, v \in \mathbb{R}$.

Tipp: Benutzen Sie die Funktion $h(u, v) := g'(u)\, v^2$ und für den Fall $p \geq 2$ die Identität

$$\langle g(u) - g(v), u - v\rangle_{\mathbb{R}} = \frac{|u|^{p-2} + |v|^{p-2}}{2}|u - v|^2 + \frac{|u|^{p-2} - |v|^{p-2}}{2}(|u|^2 - |v|^2).$$