Abteilung für Angewandte Mathematik 05.12.2016
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2016/2017 — Woche 8

Abgabe: Montag, den 12. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^d$ mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial\Omega$, sei $s > 0$ und $p \in (1, \infty)$. Wir definieren $X := W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ und versehen diesen Raum mit der Norm $\|u\|_X := \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}$. Sei weiter der Operator A durch

$$\langle Au, \varphi \rangle := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla\varphi + s\, u\, \varphi\, dx, \qquad \forall u, \varphi \in X$$

definiert. Zeigen Sie, dass

a) X separabel und reflexiv ist.

b) Der Operator $A : X \to X^*$ wohldefiniert und stetig ist.

c) Der Operator $A : X \to X^*$ koerziv ist.

Aufgabe 2: (Folgerung Browder-Minty) **5 Punkte**

Sei X ein separabler, reflexiver Banachraum und sei $A : X \to X^*$ ein strikt monotoner, koerziver, hemistetiger Operator. Zeigen Sie, dass dann der Operator $A^{-1} : X^* \to X$ existiert und strikt monoton sowie demistetig ist. Dabei nennen wir einen Operator $B : X^* \to X$ strikt monoton, falls $\langle f - g, Bf - Bg \rangle > 0$ für alle $f, g \in X^*$ mit $f \neq g$ gilt.

Aufgabe 3: (Bedingung (M)) **6 Punkte**

Sei X ein reflexiver und separabler Banachraum und $B : X \times X \to X^*$ genüge den folgenden Bedingungen

a) $B(u, \cdot)$ ist monoton und hemistetig für festes $u \in X$.

b) $B(\cdot, v)$ ist für festes $v \in X$ schwach stetig, d. h. $u_n \rightharpoonup u$ in X impliziert $B(u_n, v) \rightharpoonup B(u, v)$ in X^*.

c) Die Funktion $u \mapsto \langle B(u, v), u \rangle$ ist für festes $v \in X$ schwach unterhalbstetig, d. h. $u_n \rightharpoonup u$ in X impliziert $\langle B(u, v), u \rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle B(u_n, v), u_n \rangle$.

Zeigen Sie, dass der durch $Au := B(u, u)$ definierte Operator $A : X \to X^*$ die Bedingung (M) erfüllt.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Folgen.

a) Zeigen Sie, sofern die rechte Seite der Ungleichung definiert ist,

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

b) Gilt auch $\limsup_{n\to\infty}(a_n - b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n - \limsup_{n\to\infty} b_n$?

c) Zeigen Sie, dass in a) Gleichheit gilt, falls b_n eine konvergente Folge ist.