Abteilung für Angewandte Mathematik 12.12.2016
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2016/2017 — Woche 9
Abgabe: Montag, den 19. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **5 Punkte**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und $1 < p, p' < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Zeigen Sie, dass es für $f \in L^{p'}(\Omega)$ und $g \in W^{1,p}(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung des Problems

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

gibt.

Tipp: Transformieren Sie die Gleichung auf homogene Randwerte und betrachten Sie den verschobenen Operator $A_g(\cdot) := A(\cdot + g)$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**
Sei V ein reflexiver Banachraum, der stetig und dicht in einen Hilbertraum H einbettet, d. h. es existiert eine stetige, lineare und injektive Abbildung $i : V \to H$ und es gilt $\overline{i(V)}^{\|\cdot\|_H} = H$. Analog zur Vorlesung definieren wir die Abbildung $E : H^* \to V^*$ durch

$$\langle Ef, x\rangle_V := \langle f, i(x)\rangle_H \qquad f \in H^*, x \in V.$$

Zeigen Sie, dass $E(H^*)$ dicht in V^* ist.

Tipp: Nehmen Sie an, dass $\overline{E(H^*)}^{\|\cdot\|_{V^*}}$ ein echter Teilraum von V^* ist.

Aufgabe 3: (Fundamentallemma der Variationsrechnung) **6 Punkte**
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall, $1 \leq p < \infty$ und X ein Banachraum. Zeigen Sie, dass für $u \in L^p(I, X)$ aus

$$\int_I u(s)\,\varphi(s)\,ds = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(I) \tag{$*$}$$

bereits $u = 0$ fast überall in X folgt. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Zeigen Sie, dass für $u \in L^p(I, X)$ und $h \in \mathbb{R}$ auch $u_h \in L^p(I, X)$ gilt, wobei

$$u_h(t) := \begin{cases} u(t+h) & \text{für } t + h \in I, \\ 0 & \text{für } t + h \notin I. \end{cases}$$

Zeigen Sie weiter, dass $u_h \to u$ in $L^p(I, X)$ gilt.

Bitte wenden...

b) Zeigen Sie, dass für $u \in L^p(I,X)$ und $t_0 \in I$ die Funktion

$$v : \overline{I} \to X, \quad v(t) := \int_{t_0}^{t} u(s)\, ds$$

für fast alle $t \in I$ Fréchet-differenzierbar ist und $v'(t) = u(t)$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass für $u \in L^p(I,X)$ aus $(*)$ bereits

$$\left\| \int_{t_0}^{t} u(s)\, ds \right\|_X = 0$$

für alle $t_0, t \in I$ gilt und folgern Sie damit die Aussage.

Definition:
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall und X ein Banachraum. Sei $\mathcal{D}(I)$ der mit der kanonische Topologie versehene hausdorffsche, lokalkonvexe Raum $C_0^\infty(I)$. Eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(I)$ konvergiert also gegen $\varphi \in C_0^\infty(I)$ in $\mathcal{D}(I)$ genau dann, wenn

1. eine kompakte Menge $K \subset\subset I$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit *supp* $\varphi_n \subset K$ für alle $n \geq n_0$ und
2. $\lim_{n\to\infty} \max_{t\in K} |\varphi_n^{(\ell)}(t) - \varphi^{(\ell)}(t)| = 0$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt.

Den Vektorraum aller stetigen, linearen Abbildungen von $\mathcal{D}(I)$ nach X bezeichnen wir mit $\mathcal{D}'(I,X)$ und nennen dessen Elemente *X-wertige Distributionen.* Wir sagen, dass eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(I,X)$ gegen ein $T \in \mathcal{D}'(I,X)$ konvergiert, falls für alle $\varphi \in C_0^\infty(I)$

$$\langle T_n, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(I,X)} \xrightarrow{n\to\infty} \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(I,X)} \qquad \text{in } X.$$

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall, $1 \leq p < \infty$ und X ein Banachraum. Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : L^p(I,X) \to \mathcal{D}'(I,X)$ mit

$$\langle Tu, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(I,X)} := \int_I u(s)\, \varphi(s)\, ds$$

wohldefiniert, linear, folgenstetig und injektiv ist.

Bemerkung: Wir nennen eine X-wertige Distribution $T \in \mathcal{D}'(I,X)$ *regulär*, falls ein $u \in L^p(I,X)$ mit $Tu = T$ existiert. Wir schreiben dann T_u für T.