Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein 19.12.2016

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2016/2017 — Woche 10

Abgabe: Montag, den 09. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: (Distributionelle Zeitableitung) **4 Punkte**

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall, X ein Banachraum und $\mathcal{D}'(I,X)$ der Raum der X-wertigen Distributionen. Für $T \in \mathcal{D}'(I,X)$ wird durch

$$\langle T', \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(I,X)} := -\langle T, \varphi' \rangle_{\mathcal{D}'(I,X)}, \qquad \varphi \in C_0^\infty(I)$$

die *distributionelle Zeitableitung* T' *von* T definiert.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $T \mapsto T'$ eine wohldefinierte und folgenstetige Abbildung von $\mathcal{D}'(I,X)$ in sich selbst ist.

b) Sei $u \in C^1(\overline{I},X)$. Zeigen Sie, dass für die gemäß Aufgabe 4, Woche 9 durch u bzw. u' induzierten regulären Distributionen T_u und $T_{u'}$ die Identität $T'_u = T_{u'}$ in $\mathcal{D}'(I,X)$ gilt.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall und X ein Banachraum. Zeigen Sie, dass für $T \in \mathcal{D}'(I,X)$ mit $T' = 0$ folgt, dass T eine reguläre Distribution bezüglich einer konstante Funktion von I nach X ist. Zeigen Sie dafür:

1. Für $\psi \in C_0^\infty(I)$ gilt

$$\psi = \eta' \text{ für ein } \eta \in C_0^\infty(I) \quad \text{genau dann wenn } \int_I \psi(t)\,dt = 0.$$

2. Jedes $\omega \in C_0^\infty(I)$ besitzt eine Darstellung $\omega = \psi_1 \int_I \omega(t)\,dt + \eta'$ mit ψ_1, $\eta \in C_0^\infty(I)$, $\int_I \psi_1(t)\,dt = 1$.

und folgern Sie damit die Behauptung.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Seien X, Y Banachräume und sei $e : X \to Y$ linear und stetig. Sei weiter I ein offenes, beschränktes Intervall und $1 \le p < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$e_L : L^p(I,X) \to L^p(I,Y), \qquad e_L(u)(t) := e(u(t)) \quad (t \in I)$$

wohldefiniert, linear und stetig ist und

$$e\Big(\int_I u(t)\,dt\Big) = \int_I e_L(u)(t)\,dt \qquad \text{in } Y$$

gilt. Sei zusätzlich e injektiv. Zeigen Sie, dass auch e_L injektiv ist.

Bitte wenden...

Aufgabe 4: (Reguläre distributionelle Zeitableitung) **7 Punkte**

Seien X, Y Banachräume und sei $e : X \to Y$ linear, stetig und injektiv. Sei weiter $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall und $1 < p, q < \infty$. Falls für $u \in L^p(I, X)$ ein $v \in L^q(I, Y)$ mit

$$-\int_I v(t)\,\varphi(t)\,dt = e\Big(\int_I u(t)\,\varphi'(t)\,dt\Big) \quad \text{in } Y \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(I)$$

existiert, so nennen wir v *reguläre distributionelle Zeitableitung in* $L^q(I, Y)$ und schreiben $v = \frac{d_Y}{dt}u$.

a) Sei $u \in L^p(I, X)$. Zeigen Sie, dass die reguläre distributionelle Zeitableitung in $L^q(I, Y)$ von u wohldefiniert ist.

b) Sei $u \in L^p(I, X)$ mit $\frac{d_Y}{dt}u \in L^q(I, Y)$. Zeigen Sie, dass für die durch $e_L(u)$ und $\frac{d_Y}{dt}u$ induzierten Y-wertigen Distributionen $T_{e_L(u)}$ bzw. $T_{\frac{d_Y}{dt}u}$ auch

$$T'_{e_L(u)} = T_{\frac{d_Y}{dt}u}$$

(im Sinne der distributionellen Zeitableitung) gilt.

c) Zeigen Sie, dass der verallgemeinerte Sobolevraum

$$W^{1,p,q}(I, X, Y) := \Big\{ u \in L^p(I, X) \,\Big|\, \frac{d_Y}{dt}u \in L^q(I, Y) \Big\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{W^{1,p,q}(I,X,Y)} := \|u\|_{L^p(I,X)} + \Big\| \frac{d_Y}{dt}u \Big\|_{L^q(I,Y)}$$

ein Banachraum ist.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch ins neue Jahr!