Abteilung für Angewandte Mathematik 09.01.2017
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2016/2017 — Woche 11
Abgabe: Montag, den 16. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: (Hauptsatz) **9 Punkte**

Seien X, Y Banachräume und sei $e : X \to Y$ linear, stetig und injektiv. Sei weiter $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall und $u \in W^{1,p,q}(I, X, Y)$ mit $1 < p, q < \infty$.

a) Sei $g : \overline{I} \to Y$ definiert durch
$$g(t) := \int_a^t \frac{d_Y}{dt} u(s)\, ds.$$
Zeigen Sie $g \in C(\overline{I}, Y)$ sowie $T_g' = T_{\frac{d_Y}{dt}u}$ für die induzierten Y-wertigen Distributionen im Sinne der distributionellen Zeitableitung.

b) Zeigen Sie, dass $e_L(u) \in L^p(I, Y)$ mit $e_L(u)(t) := e(u(t))$ (siehe Aufgabe 3, Woche 10) einen eindeutigen stetigen Repräsentanten besitzt.

c) Zeigen Sie, dass im Sinne dieses Repräsentanten die Abbildung
$$e_L : W^{1,p,q}(I, X, Y) \to C(\overline{I}, Y)$$
linear, injektiv und stetig ist sowie
$$e_L(u)(t) = e_L(u)(s) + \int_s^t \frac{d_Y}{dt} u(\tau)\, d\tau$$
für alle $u \in W^{1,p,q}(I, X, Y)$ und alle $s \leq t \in I$ gilt.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei (V, H, V^*) ein Gelfand-Tripel, wobei $V \subset H$ durch die Identitätsabbildung gegeben ist. Sei weiter $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes, offenes Intervall, $1 < p, p' < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $u \in L^p(I, V)$. Zeigen Sie, dass $\frac{d_{V^*}}{dt} u \in L^{p'}(I, V^*)$ im Sinne der regulären distributionellen Zeitableitung genau dann existiert, falls $\frac{du}{dt} \in L^{p'}(I, V^*)$ im Sinne der verallgemeinerten Zeitableitung aus der Vorlesung existiert. Zeigen Sie weiter $\frac{d_{V^*}}{dt} u = \frac{du}{dt}$ im Falle der Existenz.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Betrachten Sie die folgende quasilineare parabolische Gleichung
$$\begin{aligned} \partial_t u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + su &= f && \text{in } I \times \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } I \times \partial\Omega, \\ u(0) &= u_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned} \tag{$*$}$$
Dabei sei Ω ein offenes und beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $\frac{2d}{d+2} < p < d$, $s \in \mathbb{R}$ mit $s < 0$ und $I = (0, T)$ ein endliches Zeitintervall. Zeigen Sie, dass $(*)$ für alle $f \in L^{p'}(I \times \Omega)$ mit $1/p + 1/p' = 1$ und alle $u_0 \in L^2(\Omega)$ mindestens eine schwache Lösung $u \in W^{1,p,p'}(I, W_0^{1,p}(\Omega), (W_0^{1,p}(\Omega))^*)$ besitzt.

Tipp: Verwenden Sie die (nicht zu beweisende) Gronwall'sche Ungleichung und schreiben Sie nur die Teile des Beweises auf, in denen sich die Argumente im Vergleich zur Vorlesung verändern.