Abteilung für Angewandte Mathematik 16.01.2017
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2016/2017 — Woche 12

Abgabe: Montag, den 23. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und $A : M \subset X \to 2^{X^*}$ monoton. Zeigen Sie, dass A genau dann eine maximal monotone Abbildung ist, wenn es keine echte monotone Erweiterung gibt, also für alle monotonen Abbildungen $\widetilde{A} : M \subset X \to 2^{X^*}$ mit $G(\widetilde{A}) \supset G(A)$ bereits $\widetilde{A} = A$ gilt.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei X ein reflexiver Banachraum und $A : X \to X^*$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $A : X \to X^*$ genau dann maximal monoton ist, falls A positiv semidefinit ist, d. h. $\langle Ax, x\rangle_X \geq 0$ für alle $x \in X$ gilt.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei V ein normierter Vektorraum und $g : V \to (-\infty, \infty]$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

a) g ist unterhalbstetig, d. h. aus $x_n \to x$ in V folgt $g(x) \leq \liminf g(x_n)$.

b) Der Epigraph $epi(g) := \{(x, \lambda) \in V \times \mathbb{R} \,|\, g(x) \leq \lambda\}$ ist abgeschlossen.

c) Für alle $r \in \mathbb{R}$ ist die Menge $g^{-1}((-\infty, r])$ abgeschlossen.

Aufgabe 4: **7 Punkte**

Sei X ein Banachraum und $f : X \to (-\infty, \infty]$ mit

$$dom(f) := \{x \in X \,|\, f(x) < \infty\} \neq \emptyset.$$

Die konjugierte Funktion f^* ist durch

$$f^* : X^* \to (-\infty, \infty], \quad f^*(x^*) := \sup_{x \in X} \Big(\langle x^*, x\rangle_X - f(x)\Big)$$

definiert. Wir bezeichnen mit $\partial f(\cdot)$ das Subdifferential von f. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Für alle $x \in dom(f)$ und alle $x^* \in X^*$ gilt die Young'sche Ungleichung

$$\langle x^*, x\rangle_X \leq f^*(x^*) + f(x).$$

Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn $x^* \in \partial f(x)$.

b) Für $x \in X$ gilt $f(x) = \min_{y \in X} f(y)$ genau dann, wenn $f(x) = -f^*(0)$, d. h. $-f^*(0)$ ist ein globales Minimum von f.

c) Aus $x \in dom(f)$, $x^* \in \partial f(x)$ folgt immer $x^* \in dom(f^*)$ und $J_X x \in \partial f^*(x^*)$, wobei J_X die kanonische Isometrie ist.

d) Sei $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{|x|^p}{p}$ die konjugierte Funktion mit $f^*(\xi) = \frac{|\xi|^q}{q}$ identifiziert werden kann.

Tipp: Nehmen Sie (ohne dies zu beweisen) für d) an, dass das Supremum in der Definition von f^* in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ angenommen wird.