Abteilung für Angewandte Mathematik 23.01.2017
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2016/2017 — Woche 13
Abgabe: Montag, den 30. Januar, vor der Vorlesung

Definition: Sei X ein Banachraum und $\varphi(u) := \frac{1}{2}\|u\|_X^2$. Dann nennen wir die Abbildung $J : X \to 2^{X^*}$, $J(u) := \partial\varphi(u)$ die Dualitätsabbildung, wobei $\partial f(u)$ das Subdifferential von f ist.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei H ein Hilbertraum und J die Dualitätsabbildung $J : H \to 2^{H^*}$. Zeigen Sie, dass J auf einelementige Mengen abbildet und somit als Operator $J : H \to H^*$ aufgefasst werden kann. Zeigen Sie weiter, dass für diesen Operator gilt:

$$\langle J(u), v\rangle_H = (u, v)_H \qquad u, v \in H.$$

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei (V, H, V^*) ein Gelfand-Tripel, $0 < T < \infty$, $I := (0, T)$, $1 < p, p' < \infty$ mit $1/p + 1/p' = 1$ sowie $X := L^p(I, V)$ und $W := \{u \in L^p(I, V) \mid \frac{du}{dt} \in L^{p'}(I, V^*)\}$. Zeigen Sie, dass der Operator $L : X \to 2^{X^*}$ mit

$$Lu := \begin{cases} \left\{\frac{du}{dt}\right\} & \text{falls } u \in D(L) := \{u \in W \mid u(0) = 0\}, \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

eine maximal monotone Abbildung ist.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\mathbf{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 - x_1 \\ 2x_1x_2 - x_2 \end{pmatrix}$$

gegeben und bezeichne $B_r(\mathbf{x}_0)$ den offenen r-Ball um $\mathbf{x}_0$ in $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $d(\mathbf{f}, B_{1/2}((1,0)), \mathbf{0})$ sowie $d(\mathbf{f}, B_2((0,0)), \mathbf{0})$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Zeigen Sie

$$d(-\mathbf{id}, \Omega, \mathbf{p}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } -\mathbf{p} \notin \overline{\Omega}, \\ (-1)^d & \text{falls } -\mathbf{p} \in \Omega. \end{cases}$$