Abteilung für Angewandte Mathematik 30.01.2017
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

# Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2016/2017 — Woche 14
**Abgabe: Montag, den 06. Februar, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 1: (Translations- und Homotopieinvarianz) 5 Punkte**

Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

a) Zeigen Sie die Translationsinvarianz des Abbildungsgrades von Brouwer, d. h. für $f \in C(\overline{\Omega})^d$ und $\mathbf{p} \notin f(\partial\Omega)$ gilt

$$d(f, \Omega, \mathbf{p}) = d(f - \mathbf{p}, \Omega, 0).$$

b) Zeigen Sie die Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades von Brouwer, d. h. sei $\mathbf{h} \in C([0,1] \times \overline{\Omega})^d$ und $\mathbf{p} \in C([0,1])^d$ mit $\mathbf{p}(t) \notin \mathbf{h}(t, \partial\Omega)$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt

$$d(\mathbf{h}(0,\cdot), \Omega, \mathbf{p}(0)) = d(\mathbf{h}(1,\cdot), \Omega, \mathbf{p}(1)).$$

**Aufgabe 2: (unzulässige Homotopie) 5 Punkte**

Die Funktion $h : [0,1] \times \overline{B_1(\mathbf{0})} \to \mathbb{R}^2$ (mit dem auf Polarkoordinaten transformierten Ball $B_1(\mathbf{0}) = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le r < 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$) sei gegeben durch

$$h(t,(r,\varphi)) := \begin{cases} (r,0) & t = 0,\ 0 \le r \le 1, \\ (r\cos\left(\frac{\varphi}{t}\right), r\sin\left(\frac{\varphi}{t}\right)) & 0 < t \le 1,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi t, \\ (r,0) & 0 < t \le 1,\ 0 \le r \le 1,\ 2\pi t < \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $h(t,\cdot) \in C(\overline{B_1(0)})^2$ für alle $t \in [0,1]$ sowie $h(\cdot,(r,\varphi)) \in C([0,1])^2$ für alle $(r,\varphi) \in \overline{B_1(0)}$ gilt. Berechnen Sie anschließend $d(h(0,\cdot), B_1(0), \mathbf{0})$ und $d(h(1,\cdot), B_1(0), \mathbf{0})$.

**Aufgabe 3: 5 Punkte**

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass aus $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ für den Abbildungsgrad $d(f,(a,b),0) = 1$ folgt. Zeigen Sie weiter, dass aus $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ folgt $d(f,(a,b),0) = -1$.

**Aufgabe 4: 5 Punkte**

Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $\mathbf{f} \in C^0(\overline{\Omega})^d$ und $\mathbf{p} \notin \mathbf{f}(\partial\Omega)$. Zeigen Sie, dass $d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p})$ nur von $\mathbf{f}|_{\partial\Omega}$ abhängt, d. h. für alle $\mathbf{g} \in C^0(\overline{\Omega})^d$ mit $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ auf $\partial\Omega$ gilt $d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) = d(\mathbf{g}, \Omega, \mathbf{p})$.