

## Analysis I

WS 2017/18 — Woche 10

### Präsenzaufgabe:

Ist die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \end{cases}$$

in 0 differenzierbar? Wie ist es mit  $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ?

### Aufgabe 1: (3 Punkte)

Es sei  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige, in 0 differenzierbare Funktion mit  $f(0) = f'(0) = 0$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit  $g(f(x)) = x$  für alle  $x \in (-1, 1)$ . Zeigen Sie, dass  $g$  im Punkt 0 nicht differenzierbar ist.

### Aufgabe 2: (6 Punkte)

Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall. Man zeige: Eine monotone steigende Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist bis auf abzählbar viele Sprungstellen stetig.

*Anleitung:*

- 1) Man zeige, dass  $f$  genau dann stetig in einem Punkt  $x_0$  ist, wenn  $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .
- 2) Man zeige: Für alle  $a \in D$  existieren die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \nearrow a} f(x), \quad \lim_{x \searrow a} f(x).$$

- 3) Nach 2) ist die Menge

$$M := \left\{ a \in D \mid \lim_{x \nearrow a} f(x) \neq \lim_{x \searrow a} f(x) \right\}$$

wohldefiniert. Man folgere, dass für jedes  $a \in M$  eine rationale Zahl  $q \in (\lim_{x \nearrow a} f(x), \lim_{x \searrow a} f(x))$  existiert.

- 4) Man folgere, dass  $M$  abzählbar ist.

**Aufgabe 3:** (6 Punkte)

Für  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir die Funktionen  $\cosh(\cdot)$  (Cosinus hyperbolicus) und  $\sinh(\cdot)$  (Sinus hyperbolicus) durch

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(a) Man beweise das folgende Additionstheorem:

$$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$$

(b) Man untersuche  $\sinh$  und  $\cosh$  auf Stetigkeit.

(c) Man zeige:  $\sinh$  ist streng monoton wachsend (und folglich injektiv).

(d) Definiere nun  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x) = \sinh(x)$ . Man bestimme den Definitionsbereich der Umkehrfunktion  $f^{-1}$  und finde eine explizite Darstellung für  $f^{-1}$ .

**Bonusaufgabe:** (6 Zusatzpunkte)

Eine Schnecke ist sturzbetrunken in einen 4m tiefen Brunnen gefallen. Bei dem Versuch, wieder herauszuklettern, schafft sie am ersten Tag einen Meter. Den zweiten Tag teilt sie sich in zwei Etappen ein, schafft aber pro Etappe nur  $q$  Meter ( $0 < q < 1$ ). Am dritten Tag schafft sie drei Etappen mit jeweils  $q^2$  Metern, am vierten Tag vier Etappen mit  $q^3$  Metern usw. Wie groß muss  $q$  mindestens sein, damit die Schnecke in endlicher Zeit am Brunnenrand ankommt?

*Hinweis:* Cauchy-Produkt (Satz 2.11, Kapitel 3).

\*\*\* **Wir wünschen frohe Weihnachten und einen guten** \*\*\*  
**Grenzübergang ins neue Jahr!**