Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler
8.1.2018

# Analysis I

WS 2017/18 — Woche 11

**Präsenzaufgabe:**
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in (a, b)$. Man betrachte folgende Aussagen:

(a) $f$ hat in $c$ ein relatives Extremum;

(b) $f$ ist in $c$ differenzierbar und $f'(c) = 0$.

Man untersuche, ob die Implikationen $(a) \Rightarrow (b)$ und $(b) \Rightarrow (a)$ wahr sind. Für eine falsche Implikation gebe man ein Gegenbeispiel an.

**Aufgabe 1:** (6 Punkte)

(a) Man bestimme die Ableitung von $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, falls $f(x)$ durch

  (i) $(x^x)^x$

  (ii) $\log(\log(1 + x))$

  definiert ist.

(b) Man berechne die folgenden Limiten

  (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{1-\cos(x)}$ für $a \neq 0$,

  (ii) $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + 2x)^{\frac{1}{3x}}$

**Aufgabe 2:** (5 Punkte)

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und die Einschränkung $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ sei differenzierbar.

  Man zeige: Falls $\lim_{x\to 0} f'(x)$ existiert, so ist $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x)$.

  *Hinweis:* Mittelwertsatz.

(b) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und gerade, d.h. $g(x) = g(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $g'(0) = 0$.

**Aufgabe 3:** (4 Punkte)

Man zeige: Für $x \in [0, 1]$ gilt

$$\log(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

Insbesondere hat die alternierende harmonische Reihe den Wert $\log(2)$.
*In einer früheren Version stand hier $(-1)^k$. Das war ein Tippfehler.*