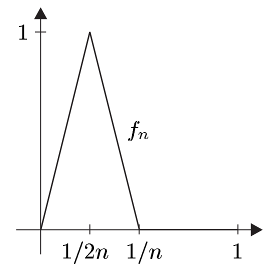
Abteilung für Angewandte Mathematik 15.1.2018
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler

Analysis I

WS 2017/18 — Woche 12

Präsenzaufgabe:
Es sei eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ 2 - 2nx, & x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0, & x \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$



Konvergiert sie gleichmäßig / punktweise?

Aufgabe 1: (4,5 Punkte)
Man untersuche die folgenden drei Funktionenfolgen auf $[0,1]$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(a) $f_n(x) = \begin{cases} x^n, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ (b) $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{1+nx}, & x \in (0,1] \end{cases}$ (c) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$

Aufgabe 2: (5,5 Punkte)

(a) Man entscheide, ob die folgenden Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ Regelfunktionen sind:

(i) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$ (ii) $g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0. \end{cases}$

(iii) $h(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0. \end{cases}$

(b) Man zeige: Sind $f, g \in T([a,b])$, so ist auch $f \cdot g \in T([a,b])$.

(c) Man zeige: Sind $f, g \in R([a,b])$, so ist auch $f \cdot g \in R([a,b])$.

Aufgabe 3: (5 Punkte)
Es seien $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Man beweise:

(a) Ist f stetig und $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$, so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

(b) Die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
ist stetig.