Abteilung für Angewandte Mathematik 22.1.2018
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler

Analysis I

WS 2017/18 — Woche 13

Präsenzaufgabe:

Man zeige: Ist $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ stetig und ungerade, d.h. $f(x) = -f(-x)\ \forall x \in [-1,1]$, dann gilt
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0.$$

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Man beweise die *Hölder'sche Ungleichung* für Integrale: Für $a < b$ und $f, g \in R([a,b])$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt:

(a) Die Funktionen $|f|^p$, $|g|^q$ sind Regelfunktionen;

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $|a^\mu - b^\mu| \leq |a-b|^\mu$ für $a, b > 0$ und $0 < \mu < 1$.

(b) Es gilt
$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

Hinweis: Man lasse sich vom Beweis von Satz 3.9, Kapitel 6 inspirieren.

Aufgabe 2: (8 Punkte)
Man berechne die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_0^\pi x^3 \cos(x)\,dx,$ (ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(nx)\,dx,\ (k, n \in \mathbb{Z})$ (iv) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x^2}\,dx$

Hinweis für (iv): Finde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sodass $\frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x}\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.