Abteilung für Angewandte Mathematik 29.1.2018
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler

Analysis I

WS 2017/18 — Woche 14

Präsenzaufgabe:

Man berechne

$$\frac{d}{dt}\int_0^\pi \sin(tx)\,dx$$

auf zwei Arten: (i) Indem man zuerst das Integral berechnet und dann nach t differenziert und (ii) indem man Satz 5.2, Kapitel 7 anwendet.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

(a) Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \cosh(k)x^k$

(b) Man berechne den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^{k^2} x^k.$$

Aufgabe 2: (6 Punkte)

(a) Man zeige, dass die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und bestimme ihren Wert

(i) $\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\,dx$

(ii) $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$.

(b) Man bestimme die Stammfunktionen der folgenden Funktionen

(i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sin(x)\cos(x)$

(ii) $f:[-1.1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\arcsin(x)$.

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Es sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n|x|}$. Man zeige: Alle f_n sind differenzierbar, und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Betragsfunktion. Kann die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent sein?

Hinweis: Um zu zeigen, dass f_n differenzierbar ist, eignet sich Aufgabe 2 von Blatt 11.