Abteilung für Angewandte Mathematik 23.10.2017
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler

Analysis I

WS 2017/18 — Woche 2

Präsenzaufgabe: (Unendliche Vereinigungen und Schnitte)

Es seien I, M Mengen und $I \neq \emptyset$. Außerdem sei $\mathcal{S} := \{N_\alpha \,|\, \alpha \in I\}$ eine Familie von Teilmengen von M (d.h. $N_\alpha \subseteq M\ \forall \alpha \in I$). Wir definieren

$$\bigcap_{\alpha \in I} N_\alpha := \{x \in M \,|\, \forall \alpha \in I : x \in N_\alpha\} \qquad \text{(Durchschnitt)}$$
$$\bigcup_{\alpha \in I} N_\alpha := \{x \in M \,|\, \exists \alpha \in I : x \in N_\alpha\} \qquad \text{(Vereinigung)}$$

(a) Wir wählen nun speziell $I = \mathbb{N}, M = \mathbb{R}$ und $\mathcal{S} = \{M_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$, wobei $M_k := \{i \in \mathbb{Z} \,|\, i \geq -k\}$. Man bestimme $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$.

(b) Nun seien I, M wie in (a) und $\mathcal{S} = \{M_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$, wobei $M_k := \left\{\frac{1}{i} \,|\, i \geq k\right\} \cup \{0\}$. Man bestimme $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k$.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

(a) Man zeige: Für alle reellen Zahlen x, y gilt $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ (*Bemerkung:* Analog kann man $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ zeigen.)

(b) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Betrachte die folgende Aussage:

$$\exists C > 0 : \forall x \in A : x < C. \tag{1}$$

  (i) Man formuliere die Negation von Aussage (1).

  (ii) Man prüfe, ob Aussage (1) für $A = [0, 1]$, bzw. $A = [0, \infty)$ wahr ist.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

(a) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nicht leer. Jedes $\varepsilon > 0$ sei eine obere Schranke von M. Zeige, dass $\sup(M) \leq 0$ gilt.

(b) Es seien $M, N \subseteq \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Wir definieren $M + N := \{x + y \,|\, x \in M,\ y \in N\}$. Zeige, dass das Supremum von $M + N$ existiert und dass gilt $\sup(M + N) = \sup(M) + \sup(N)$.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, die das Quadrat einer rationalen Zahl $\xi \in \mathbb{Q}$ sei, d.h. $d = \xi^2$. Zeige, dass $d = n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Anleitung: Sei o.B.d.A. $\xi > 0$. Es seien m die kleinste natürliche Zahl, sodass $m \cdot \xi \in \mathbb{N}$, und n die kleinste natürliche Zahl mit $\xi \leq n$.

(a) Zeige, dass m und n mit den geforderten Eigenschaften existieren.

Setze $p := m \cdot (\xi - n + 1)$. Zeige:

(b) $p \in \mathbb{N}$ und $p \leq m$,

(c) $p \cdot \xi \in \mathbb{N}$,

(d) $p = m$ und $\xi = n$.

Folgerung: Ist $d \in \mathbb{N}$ keine Quadratzahl, d.h. $d \in \mathbb{N} \backslash \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\} = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, \ldots\}$, so hat die Gleichung $x^2 = d$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$.