Abteilung für Angewandte Mathematik 6.11.2017
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler

Analysis I

WS 2017/18 — Woche 4

Präsenzaufgabe:

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt *offen*, wenn es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U.$$

Man zeige: Jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ ist Vereinigung von abzählbar vielen Intervallen.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Seien M_1, M_2, M_3 Mengen und seien $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ Funktionen. Beweisen Sie:

(a) Sei $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, dann ist g injektiv.

(b) Sei $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, dann ist f surjektiv.

(c) Ist f injektiv, so ist $f^{-1} := \{(f(x), x) \mid x \in M_1\}$ eine Abbildung von Bild(f) nach M_1.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

(a) Man beweise, dass $\mathbb{N} \cup \{0\}$ abzählbar ist.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

(*Hinweis:* Benutze, dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar ist, falls alle A_n abzählbar sind.)

Aufgabe 3: (5 Punkte) Man beweise folgende Identitäten:

(a) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [n, \infty) = \emptyset$

(b) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset.$

Warum ist dies kein Widerspruch zum Intervallschachtelungsprinzip?