Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler 13.11.2017

Analysis I

WS 2017/18 — Woche 5

Präsenzaufgabe:

Man untersuche die folgenden beiden Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

$$\text{(a)} \quad a_n = \frac{n^3+1}{100n^2-n-8}, \qquad \text{(b)} \quad a_n = \frac{2n^2+7n+3}{5n^3+6}$$

Einschub: Quadratwurzel Wir haben in Aufgabe 1, Blatt 3 gezeigt, dass es ein $y \in \mathbb{R}$ gibt mit $y^2 = 2$, indem wir die Menge $\{y \in \mathbb{R} \mid y^2 < 2\}$ und ihr Supremum betrachtet haben. Ganz analog zeigt man (indem man die Menge $\{y \in \mathbb{R} \mid y^2 < x\}$ betrachtet):

Zu jedem $x \in \mathbb{R}^+$ existiert genau ein $y \in \mathbb{R}^+$ sodass $y^2 = x$.

Zu $x \in \mathbb{R}^+$ definieren wir $\sqrt{x} := y$, wobei y die eindeutige Lösung von $y^2 = x$ ist. Da y eindeutig ist, definiert dies eine Funktion

$$\sqrt{} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Man prüfe die Injektivität und Surjektivität der folgenden Funktionen und bestimme ggf. die Umkehrfunktion.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

(b) $f : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1-|x|}$

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} b_n$ existiert und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$ gilt.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Man untersuche die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{n}{10^n}$.

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Bitte wenden!

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Es sei $a > 0$. Zu gegebenem $b > 0$ definieren wir eine Folge (x_n) rekursiv durch $x_1 = b$ und

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 3a}{3x_n^2 + a} x_n$$

Man zeige: x_n konvergiert gegen $\sqrt{a}$.
Hinweis: Untersuche Monotonie und Beschränktheit in den Fällen $b < \sqrt{a}$ und $b > \sqrt{a}$. Finde eine Gleichung, die den Grenzwert von x_n charakterisiert.

Bemerkung: Dies liefert eine Methode, um $\sqrt{a}$ numerisch anzunähern!