Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler

20.11.2017

Analysis I

WS 2017/18 — Woche 6

Präsenzaufgabe:

Es sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Man beweise oder widerlege, dass die folgenden Implikationen gelten:

$$(a) \Rightarrow (b), \qquad (b) \Rightarrow (a),$$

wobei

(a) Die Folge (a_n) ist eine Cauchyfolge;

(b) Die Folge (b_n) mit $b_n = a_{n+1} - a_n$ ist eine Nullfolge.

Aufgabe 1: (9 Punkte)

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2n^2+(-1)^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Hinweis für (f): Bernoulli'sche Ungleichung!

Aufgabe 2: (6 Punkte)

(a) Man bestimme den Limes Superior (lim sup) und den Limes Inferior (lim inf) der Folge

$$a_n = \big(1+(-1)^n\big)(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

(b) Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen. Man zeige:

(i) $\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty}(a_n)$

(ii) $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \limsup_{n\to\infty}(a_n) + \limsup_{n\to\infty}(b_n)$

(c) Man finde Folgen $(a_n), (b_n)$ mit

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) < \limsup_{n\to\infty}(a_n) + \limsup_{n\to\infty}(b_n).$$