Abteilung für Angewandte Mathematik 27.11.2017
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler

Analysis I

WS 2017/18 — Woche 7

Präsenzaufgabe:

Man zeige, dass das Intervall $(0,1] \subseteq \mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen ist.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $|a_n - a_{n+1}| \leq 2^{-n}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Man zeige: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.

(b) Es sei die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_1 = 0,\ b_2 = 1$ und $b_n = (b_{n-1}+b_{n-2})/2$ für $n \geq 3$. Man zeige, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Hinweis: Zeige induktiv, dass $b_{n+1} - b_n = (-1)^{n-1}/2^{n-1}$.

Korrektur: in einer alten Version stand $b_{n+1} - b_n = (-1)^n/2^n$. Das war falsch.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Man bestimme zu den Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils die Häufungswerte der Folge und die Häufungspunkte der Menge $\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

(a) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

(b) $a_n = n - 2^{k_n}$, wobei $k_n = \max\{m \in \mathbb{N} \,|\, 2^m \leq n\}$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

(a) Es sei $M := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Man zeige: jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von M.

(b) Es sei M definiert wie in (a) und $f : M \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 4x + 3}.$$

Man zeige, dass f auf M wohldefiniert ist und untersuche, ob $\lim_{x\to x_0} f(x)$ für $x_0 = 0,\ x_0 = 1$ existiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 4: (3 Punkte) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

In welchen Punkten des Intervalls $[0,1]$ ist f stetig und in welchen unstetig?