Abteilung für Angewandte Mathematik 4.12.2017
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler

Analysis I

WS 2017/18 — Woche 8

Präsenzaufgabe:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein $L > 0$ gibt, sodass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \forall x, y \in D.$$

Man zeige: Jede Lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Man zeige, dass dann $f(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Gleichung
$$f(x) = \alpha$$
für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ genau zwei Lösungen hat?

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R};\ f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Man zeige: Für alle $x, y \geq 0$ gilt $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

(b) Man zeige: f ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Man beweise mit dem Satz von Heine-Borel (Satz 1.8, Kapitel 4), dass es dann zwei offene Mengen U, V gibt, sodass $K_1 \subseteq U,\ K_2 \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.
Hinweis: Betrachte zunächst den Fall $K_2 = \{y\}$. Benutze, dass je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen.