Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler

11.12.2017

Analysis I

WS 2017/18 — Woche 9

Präsenzaufgabe: (n-te Einheitswurzeln)

Man beweise: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau n verschiedene komplexe Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ und diese sind gegeben durch

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \qquad k \in \{0, \dots n-1\}$$

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Man entscheide, ob die folgenden Limiten existieren und berechne gegebenenfalls ihren Wert.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(x^2)$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

Aufgabe 2: (3 Punkte)

(a) Man schreibe die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $z = \dfrac{1}{1+i}$ (ii) $z = \dfrac{(1+i)^2}{1-i}$.

(b) Man untersuche die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ auf Konvergenz.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: (3 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir eine erste Näherung für die Zahl π finden. Es sei

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

die abgeschnittene Reihenentwicklung der Cosinusfunktion.

(a) Man berechne jeweils die kleinste positive Nullstelle x_0 von f_1 und y_0 von f_2.

Man zeige mit Hilfe von Satz 3.3 (Kapitel 5):

(b) Es gilt $\cos(x_0) > 0$

(c) Es gilt $\cos(y_0) < 0$

Man folgere, dass $\pi \in \left[2\sqrt{2}\,,\, 2\sqrt{6 - 2\sqrt{3}}\right]$.

Bemerkung: Die Wurzeln im obigen Ausdruck kann man z.B. mit Aufgabe 4 (Blatt 5) annähern. Dann erhält man die (relativ grobe) Abschätzung $2,82 < \pi < 3,19$.
Mit der obigen Methode kann man π im Prinzip beliebig genau annähern. Die Differentialrechnung wird aber noch effizientere Methoden liefern.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Man untersuche, an welchen Stellen die folgenden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ stetig sind:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{für } x \neq 2, \\ 4 & \text{für } x = 2 \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{|x|} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$