Analysis III — Woche 1

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. M. Křepela — Abgabe bis 22.10.2018, 10 Uhr

Aufgabe 1 **5 Punkte**

Sei X eine Menge.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A} := \big\{ A \subset X \,|\, A \text{ oder } X \setminus A \text{ ist abzählbar} \big\}$$

eine σ-Algebra auf X ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ die von

$$\mathcal{M} := \big\{ A \subset X \,|\, A \text{ ist endlich} \big\}$$

erzeugte σ-Algebra ist.

Aufgabe 2 **3 Punkte**

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \{ B \subset Y \,|\, f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$$

eine σ-Algebra auf Y ist.

Aufgabe 3 **7 Punkte**

Sei X eine Menge und $\omega : X \to [0, \infty)$ eine beliebige Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\mu(A) := \sum_{x \in A} \omega(x)$$

ein Maß auf $\mathcal{P}(X)$ ist. Da X überabzählbar sein darf, ist die unendliche Summe wie folgt definiert:

$$\sum_{x \in A} \omega(x) = \sup \left\{ \sum_{x \in K} \omega(x) \,\Big|\, K \subset A \text{ ist endlich} \right\}.$$

Dies geht nur, da ω nicht-negativ ist.

Aufgabe 4 **5 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbare Funktionen. Für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ definiere man

$$f_k(x) := \begin{cases} k, & \text{falls } f(x) \geq k, \\ -k & \text{falls } f(x) \leq -k, \\ f(x) & \text{sonst,} \end{cases}$$

und g_k analog.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Funktion f_k $\mathcal{A}$-messbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass $f_k + g_k \to f + g$ punktweise überall dort, wo $f + g$ definiert ist.