Analysis III — Woche 10

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. M. Křepela — Abgabe bis 7.1.2019, 10 Uhr

10 Punkte auf diesem Blatt sind Zusatzpunkte.

Aufgabe 34 — **10 Punkte**

Wir führen die folgende Konstruktion durch: Vom Intervall $[0,1]$ entfernen wir das offene mittlere Drittel $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ und bezeichnen die erhaltene Menge $\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$ mit C_1. Weiter machen wir das Gleiche mit jedem Intervall von C_1 und erhalten $C_2 := \left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right]\cup\left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]$. Dies setzen wir fort und erhalten eine (monoton fallende) Folge von Mengen $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Jedes C_n lässt sich als

$$C_n = E_n \cap E_{n-1}, \qquad E_n := \bigcup_{k=0}^{\frac{3^n-1}{2}} \left[\frac{2k}{3^n}, \frac{2k+1}{3^n}\right]$$

aufschreiben. Die Menge

$$C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\frac{3^n-1}{2}} \left[\frac{2k}{3^n}, \frac{2k+1}{3^n}\right]$$

heißt das *Cantor-Diskontinuum*. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Die Menge C ist eine nichtleere kompakte Untermenge von $[0,1]$.

(b) Es existiert eine Bijektion zwischen C und $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Hier ist $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, dass $x_n \in \{0,1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Die Menge C ist überabzählbar.

(d) Es gilt $\operatorname{int}(C) = \emptyset$.

(e) Die Menge C ist Lebesgue-messbar mit $\lambda^1(C) = 0$.

Aufgabe 35 — **5 Punkte**

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und $0 < \alpha < \lambda^n(A)$. Finden Sie eine offene Menge $D \subset A$ so, dass D in A dicht ist (d.h. $\overline{D} = \overline{A}$) und $\lambda^n(D) = \alpha$.

Tipp: Finden zunächst eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, sodass $A \cap \mathbb{Q}^n \subset D$ und $\lambda^n(D) < \alpha$ gilt. Modifizieren Sie dann die Konstruktion so, dass $\lambda^n(D) = \alpha$ gilt.

Aufgabe 36 — **5 Punkte**

Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) > 0$. Sei $p \in (1,\infty)$ und $p' := \frac{p}{p-1}$. Beweisen Sie, dass für alle μ-messbare Funktionen f gilt

$$\|f\|_p = \sup\left\{ \|fg\|_1 \|g\|_{p'}^{-1} \;\middle|\; g \in L^{p'}(X,\mu),\ \|g\|_{p'} \neq 0 \right\}.$$

Aufgabe 37 — **5 Punkte**

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und f eine auf I integrierbare Funktion. Beweisen Sie, dass gilt

$$\lim_{t\to\infty} \int_I f(x) e^{itx}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Dieses Ergebnis heißt das *Lemma von Riemann-Lebesgue.*

Tipp: Approximieren Sie f durch Treppenfunktionen.

Aufgabe 38 — **5 Punkte**

Verifizieren sie mittels Differentiation unter dem Integral, dass für alle $t > -1$ gilt

$$\int_0^1 s^t \log s\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{(1+t)^2}.$$

Tipp: $\frac{\partial}{\partial t} s^t = s^t \log s$.