Analysis III — Woche 11

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. M. Křepela Abgabe bis 14.1.2019, 10 Uhr

---

Aufgabe 39 **4 Punkte**

Sei $p \in (0, \infty)$ und sei Ω die durch die Parabel $y^2 = 2px$ und die Gerade $x = p/2$ berandete beschränkte abgeschlossene Menge. Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega xy^2 \, \mathrm{d}\lambda^2(x, y).$$

Aufgabe 40 **5 Punkte**

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ das von $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ aufgespannte Dreieck und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Fubini das Folgende:

$$\int_D g(x + y) \, \mathrm{d}\lambda^2(x, y) = \int_0^1 g(t)t \, \mathrm{d}t.$$

Aufgabe 41 **5 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und seien μ, ν zwei σ-endliche Maße auf $\mathcal{A}$ derart, dass $\nu(A) \leq \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt. Zeigen Sie dann, dass eine μ-messbare Funktion f existiert so, dass $0 \leq f \leq 1$ μ-f.ü. und

$$\nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$$

für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt.

Aufgabe 42 **6 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $p, q \in [1, \infty)$. Sei $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$\begin{aligned} f(\cdot, \eta) &: x \mapsto f(x, \eta) && \text{ist messbar auf } \Omega \text{ für alle } \eta \in \mathbb{R}, \\ f(x, \cdot) &: \eta \mapsto f(x, \eta) && \text{ist stetig auf } \mathbb{R} \text{ für fast alle } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Es gebe eine Funktion $a \in L^q(\Omega)$ und ein $b > 0$ so, dass für fast alle $x \in \Omega$ und alle $\eta \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x, \eta)| \leq |a(x)| + b \, |\eta|^{p/q}.$$

Für $u \in L^p(\Omega)$ definieren wir

$$F(u)(x) := f(x, u(x)).$$

(a) Zeigen Sie, dass Fu für alle $u \in L^p(\Omega)$ λ^n-messbar ist.
Tipp: Approximieren Sie u durch Treppenfunktionen.

(b) Zeigen Sie, dass ein $c > 0$ existiert so, dass für alle $u \in L^p(\Omega)$ gilt

$$\|F(u)\|_{L^q(\Omega)} \leq c \left(\|a\|_{L^q(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p/q} \right).$$