Analysis III — Woche 12

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. M. Křepela — Abgabe bis 21.1.2019, 10 Uhr

---

Aufgabe 43 — **5 Punkte**

Beweisen Sie für das Lebesgue-Maß des durch

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq (\varrho(z))^2, z \in [a, b]\}$$

gegebenen Rotationskörpers mit stetigem $\varrho : [a; b] \to (0, \infty)$ die Formel

$$\lambda^3(A) = \pi \int_a^b (\varrho(z))^2 \,\mathrm{d}z.$$

Tipp: Verwenden Sie die Zylinderkoordinaten $f(r, \varphi, z) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)^\top$.

Aufgabe 44 — **5 Punkte**

Sei $\varrho : [a, b] \to (0, \infty)$ stetig und sei (ξ, ζ) der Schwerpunkt der Fläche

$$F := \{(x, z) \,|\, z \in [a, b], 0 \leq x \leq \varrho(z)\},$$

der durch

$$\xi := \frac{1}{\lambda^2(F)} \int_F x \,\mathrm{d}\lambda^2(x, z), \qquad \zeta := \frac{1}{\lambda^2(F)} \int_F z \,\mathrm{d}\lambda^2(x, z)$$

bestimmt ist. Sei A der durch Rotation von F um die z-Achse entstehende Körper. Beweisen Sie die *guldinsche Regel*

$$\lambda^3(A) = 2\pi\xi \cdot \lambda^2(F).$$

Aufgabe 45 — **5 Punkte**

Sei $0 < R_0 < R$ und sei T der Volltorus, welcher durch Rotation der Kreisscheibe

$$K := \{(x, z) \,|\, (x - R)^2 + z^2 \leq R_0^2\}$$

um die z-Achse entsteht. Berechnen Sie das Volumen von T ohne und mit Hilfe der guldinschen Regel.

Aufgabe 46 — **5 Punkte**

Seien $k, \omega > 0$. Beweisen Sie, dass die Länge der durch die Gleichung

$$x^2 + \frac{y^2}{1 + (k\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2}$$

angegebenen Ellipse in $\mathbb{R}^2$ gleich der Länge der Sinusoide

$$y = k \sin \omega x$$

zwischen den Punkten $(0, 0)$ und $(\frac{2\pi}{\omega}, 0)$ ist.