

**Aufgabe 47****5 Punkte**Welche der folgenden Mengen sind  $C^1$ -Untermannigfaltigkeiten? Begründen Sie!

(a)  $M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$ ,

(b)  $M_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .

**Aufgabe 48****4 Punkte**

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{S^2} x^2 y^2 z^2 \, d\omega_{S^2}(x, y, z)$$

mit

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

**Aufgabe 49****8 Punkte**Für  $R > 0$  sei  $A \subset \mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$A := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right\}.$$

Skizzieren Sie  $A$  und berechnen Sie das Volumen von  $A$ .**Aufgabe 50****4 Punkte**Es sei  $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$  und  $\varrho(x) := x^{-\alpha}$  für  $x \geq 1$ . Zeigen Sie, dass der Rotationskörper

$$\{(x, y, z) \in [1, \infty) \times \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 \leq (\varrho(x))^2\}$$

ein endliches Volumen, aber eine unendliche Oberfläche hat.