Aufgabe 51 **4 Punkte**

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene beschränkte Menge mit C^1-Rand und äußerer Normale ν. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Es gilt

$$\lambda^n(\Omega) = \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} \langle x, \nu \rangle \, \mathrm{d}\omega(x).$$

(b) Sei $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gilt

$$\int_\Omega \frac{1}{|x-y|} \, \mathrm{d}\lambda^n(x) = \frac{1}{n-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\langle x-y, \nu \rangle}{|x-y|} \, \mathrm{d}\omega(x).$$

Aufgabe 52 **5 Punkte**

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene beschränkte Menge mit C^1-Rand und äußerer Normale ν. Sei $\varphi : (a,b) \to \partial\Omega$ eine lokale Parametrisierung von $\partial\Omega$. Zeigen Sie, dass für alle $t \in (a,b)$ gilt $\nu(\varphi(t)) = \pm|\varphi'(t)|^{-1}(\varphi_2'(t), -\varphi_1'(t))^\top$.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene beschränkte Menge mit C^1-Rand. Sei $p \in \partial\Omega$ und sei $\gamma : (a,b) \to \partial\Omega \setminus \{p\}$ eine injektive Parametrisierung von $\partial\Omega \setminus \{p\}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\lambda^2(\Omega) = \frac{1}{2} \left| \int_a^b \gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_2(t)\gamma_1'(t) \, \mathrm{d}t \right|.$$

(c) Sei $\varrho : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ eine 2π-periodische C^1-Funktion. Sei Ω das von der Kurve $t \mapsto (\varrho(t)\cos t, \varrho(t)\sin t)^\top$, $t \in [0, 2\pi)$, eingeschlossene beschränkte Gebiet. Zeigen Sie:

$$\lambda^2(\Omega) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\varrho(t))^2 \, \mathrm{d}t.$$

Aufgabe 53 **5 Punkte**

Sei $h \in (0,\infty)$ und $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = z^2,\ 0 < z < h\}$. Für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sei $F(x,y,z) := (x^2, y^2, z^2)$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_M \langle F, \nu \rangle \, \mathrm{d}\omega,$$

wobei ν die äußere (bezüglich des Kegels $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq z^2,\ 0 < z < h\}$) Normale der Fläche M ist.

Tipp: Sie dürfen benutzen, dass der Satz von Gauß für Gebiete mit Lipschitz-Rand gilt, woraus folgt

$$\int_K \operatorname{div} F \, \mathrm{d}\lambda^3 = \int_M \langle F, \nu \rangle \, \mathrm{d}\omega + \int_B \langle F, \nu \rangle \, \mathrm{d}\omega,$$

wobei B die (offene) Basis des Kegels K ist. In jedem Punkt $p \in M \cup B$ ist $\nu(p)$ definiert.

Aufgabe 54 **6 Punkte**

Seien $p, q, r \in [1,\infty]$ mit $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, wobei $\frac{1}{\infty} := 0$ ist. Beweisen Sie, dass für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und alle $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ die *Faltungsungleichung von Young* gilt, d.h.

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Tipp: Für $p, q, r \in (1,\infty)$ benutzen Sie die Zerlegung

$$f(x-y)\,g(y) = f^{\frac{p}{r}}(x-y)\, g^{\frac{q}{r}}(y) \cdot f^{\frac{r-p}{r}}(x-y)\, g^{\frac{q(r-p)}{pr}}(y) \cdot g^{\frac{p-q}{p}}(y)$$

und verwenden Sie zweimal die Hölder-Ungleichung, s. auch Beweis von Satz 15.2 im Skript.