Analysis III — Woche 2

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. M. Křepela — Abgabe bis 29.10.2018, 10 Uhr

Aufgabe 5 — **6 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Seien $f, g, f_n, g_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, beliebige Funktionen. Beweisen sie das Folgende:

(a) Aus $f_n \to f$ μ-f.ü. und $f_n \to g$ μ-f.ü. folgt $f = g$ μ-f.ü.

(b) Aus $f_n \to f$ μ-f.ü. und $f = g$ μ-f.ü. folgt $f_n \to g$ μ-f.ü.

(c) Wenn $f_n \to f$ μ-f.ü. konvergiert und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n = g_n$ μ-f.ü., dann gilt $g_n \to f$ μ-f.ü.

Aufgabe 6 — **6 Punkte**

Beweisen Sie, dass sich jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ als abzählbare Vereinigung von offenen Würfeln darstellen läßt. Hierbei ist ein Würfel eine Menge der Form

$$x + (-\ell/2, \ell/2)^n := \{x + y \,|\, y \in (-\ell/2, \ell/2)^n\},$$

wobei x das Zentrum des Würfels und ℓ die Seitenlänge ist.

Aufgabe 7 — **5 Punkte**

Finden Sie einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$ so, dass f $\mathcal{A}$-messbar ist, g nicht $\mathcal{A}$-messbar ist, und $f = g$ μ-f.ü. auf X.

Aufgabe 8 — **3 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sei $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge $\mathcal{A}$-messbarer, numerischer Funktionen. Zeigen Sie, dass $\{x \,|\, f_n(x) \text{ konvergiert}\} \in \mathcal{A}$.