Analysis III — Woche 3

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. M. Křepela — Abgabe bis 5.11.2018, 10 Uhr

Aufgabe 9 **5 Punkte**

Sei X eine überabzählbare Menge. Für $A \subset X$ definieren wir $\gamma(A) := 0$, falls A abzählbar ist, und $\gamma(A) := 1$, falls A überabzählbar ist.

(a) Zeigen Sie, dass γ ein äußeres Maß auf X ist.

(b) Zeigen Sie, dass gilt $\mathcal{M}(\gamma) = \mathcal{A}$, wobei

$$\mathcal{A} := \{A \subset X \mid A \text{ abzählbar oder } X \setminus A \text{ abzählbar}\}.$$

Aufgabe 10 **5 Punkte**

Finden Sie ein Beispiel eines nicht-regulären äußeren Maßes γ auf einer endlichen Menge X.

Aufgabe 11 **5 Punkte**

Sei X eine überabzählbare Menge und sei $\mathcal{A}$ die σ-Algebra von Aufgabe 9(b). Zeigen Sie das Folgende:

(a) Das Zählmaß $\mathrm{card} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ist nicht σ-endlich auf $(X, \mathcal{A})$.

(b) Es existiert kein äußeres Maß γ auf X, sodass $\mathcal{M}(\gamma) = \mathcal{A}$ und $\gamma = \mathrm{card}$ auf $\mathcal{A}$.

Definition. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, μ-messbare, μ-fast überall endliche Funktionen. Man sagt, dass die Folge $(f_n)_n$ *im Maß gegen f konvergiert*, falls

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{|f - f_n| \geq \varepsilon\}\big) = 0$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Wir schreiben kürzer: $f_n \to f$ im Maß.

Aufgabe 12 **5 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$. Seien f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, μ-messbar und μ-fast überall endlich. Die Folge $(f_n)_n$ konvergiere μ-fast überall gegen f. Zeigen Sie, dass $f_n \to f$ im Maß gilt.