# Analysis III — Woche 4

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. M. Křepela

Abgabe bis 12.11.2018, 10 Uhr

**Aufgabe 13** — **3 Punkte**

Sei $A \subset \mathbb{R}$ abzählbar. Zeigen Sie, dass $A$ eine $\mu$-Nullmenge ist, wobei $\mu$ das im Satz 3.7 mithilfe des Elementarinhalts in $\mathbb{R}$ konstruierte äußere Maß ist.

**Aufgabe 14** — **4 Punkte**

Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ nicht-leer, durchschnittsstabil und vereinigungsstabil. Definiere

$$\mathcal{H} := \big\{ A \setminus B \,\big|\, A, B \in \mathcal{E} \big\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}$ ein Halbring ist.

**Aufgabe 15** — **5 Punkte**

Sei $(\mu_n)_n$ eine isotone Folge von Prämaßen auf einem Ring $\mathcal{R}$, d.h. $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mu_\infty(A) := \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A)$ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$ definiert.

**Aufgabe 16** — **8 Punkte**

Sei $\mathcal{J} := \{(a,b] \,\big|\, a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ der Halbring der links-offenen, rechts-abgeschlossenen Intervalle.

(a) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine (nicht unbedingt strikt) wachsende Funktion. Zeigen Sie, dass durch $\mu_F((a,b]) := F(b) - F(a)$ ein endlicher Inhalt auf $\mathcal{J}$ definiert wird.

(b) Seien $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wachsende Funktionen. Zeigen Sie, dass $\mu_F = \mu_G$ genau dann, wenn $F - G$ konstant ist.

(c) Sei $\mu$ ein endlicher Inhalt auf $\mathcal{J}$ und definiere $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F_\mu(x) := \begin{cases} \mu\big((0,x]\big) & \text{für } x \geq 0, \\ -\mu\big((x,0]\big) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $F_\mu$ wachsend ist und $\mu_{F_\mu} = \mu$ gilt.

(d) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wachsend. Zeigen Sie $F = F_{\mu_F} + F(0)$.