Analysis III — Woche 5

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. M. Křepela — Abgabe bis 19.11.2018, 10 Uhr

Aufgabe 17 — **2 Punkte**

Seien A_i, B_i, $i \in \mathbb{N}$, beliebige Mengen. Zeigen Sie, dass gilt

$$\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} B_j\right) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}}\bigcap_{j\in\mathbb{N}}(A_i \cup B_j).$$

Definition. Sei X ein topologischer Raum. Eine Menge $E \subset X$ heißt F_σ*-Menge*, falls sie als eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen darstellbar ist. Die Menge E heißt G_δ*-Menge*, falls sie als ein abzählbarer Durchschnitt offener Mengen darstellbar ist. Die Systeme aller F_σ- bzw. G_δ-Untermengen von X bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_\sigma$ bzw. $\mathcal{G}_\delta$.

Notation. Sei X eine Menge und sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System und mit $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte monotone Klasse.

Aufgabe 18 — **9 Punkte**

Es seien X ein metrischer Raum, $\mathcal{O}$ das System aller offenen Untermengen von X und $\mathcal{B}$ die borelsche σ-Algebra auf X. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Sei $E \subset X$ offen oder abgeschlossen. Dann gilt $E \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{G}_\delta$.

(b) Das Mengensystem $\mathcal{A} := \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{G}_\delta$ ist eine Algebra.
Tipp: Aufgabe 17.

(c) Es gilt $\mathcal{M}(\mathcal{O}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

(d) Es gilt $\mathcal{M}(\mathcal{O}) = \mathcal{B}$.

Aufgabe 19 — **3 Punkte**

Sei X eine Menge und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Sei $\mathcal{F}$ das System aller endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{E}$. Beweisen Sie, dass gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E})$ genau dann, wenn $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

Aufgabe 20 — **6 (+ 4) Punkte**

Seien X eine Menge, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein durchschnittsstabiles System und μ_1, μ_2 Maße auf $\sigma(\mathcal{A})$, die $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathcal{A}$ und $\mu_1(X) = \mu_2(X) < \infty$ erfüllen. Definiere

$$\mathcal{D} := \{A \in \sigma(\mathcal{A}) \,\big|\, \mu_1(A) = \mu_2(A)\}.$$

Zeigen Sie das Folgende:

(a) $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System.

(b) $\mu_1 = \mu_2$ auf $\sigma(\mathcal{A})$.

Zusatzaufgabe: Finden Sie eine Menge X, ein durchschnittsstabiles System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und Maße μ_1, μ_2 auf $\sigma(\mathcal{A})$, sodass $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathcal{A}$ und

(c) $\mu_1(X) \neq \mu_2(X)$ gilt und sowohl (a) als auch (b) sind falsch;

(d) $\mu_1(X) = \mu_2(X) = \infty$ gilt und sowohl (a) als auch (b) sind falsch.